

سلسلة ملخصات
الشيء

الدوائر الكهربائية

الجزء الثاني
الطبعة الأولى العربية
2001

محمود ناهض

تأليف: جوزيف أدمنستر

يشمل الأساسيات الموجودة في المناهج والمراجع.

يعلم الطرق الفعالة لحل المسائل.

يحتوي على الكثير من المسائل المحلولة حلاً كاملاً.

سلسلة تقوم ببيعها
منها أكثر من 30
مليون نسخة في
العالم

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

سلسلة ملخصات شوم

فى

الدوائر الكهربائية

الجزء الثانى

تأليف

جوزيف أدمستر

محمود ناهقى

مراجعة

د/ السيد حسن شهاب

أستاذ بكلية الهندسة جامعة حلوان

ترجمة

د/ محمد جمال الدين محمد عبد الغال

أستاذ متفرغ بكلية الهندسة جامعة حلوان

حقوق النشر

« الطبعة الانجليزية حقوق التأليف © 1989 دار ماكجروهيل للنشر . جميع الحقوق محفوظة

Electronic Devices and Circuits

by

Joseph Edminster

Mahmood Nahvi

« الطبعة العربية الأولى حقوق الطبع والنشر © 2001 ، جميع الحقوق محفوظة

الدارالدولية للاستثمارات الثقافية

8 إبراهيم العربى - النزهة الجديدة - مصر الجديدة - القاهرة - ج. م. ع.

ص. ب. 5599 هليوبوليس غرب/ القاهرة - تليفون: 2957655/2972344 فاكس : 2957655 (00202)

لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب

أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أى وجه أو بأى طريقة سواء كانت اليكترونية أو ميكانيكية
أو بالتصوير أو خلاف ذلك إلا بموافقة الناشر على هذا كتابة ومقدماً

رقم الايداع : 2001/3211

I.S.B.N: 977-282-098-6

مقدمة الكتاب

وضع هذا الكتاب كنسخة منقحة ومزينة من الكتاب الذى تم نشره سابقاً بنفس العنوان. وقد روعى فيه إعادة التشكيل ليكون أكثر سهولة وإيضاحاً. وأضيفت إليه عدة فصول جديدة وهى الفصل الرابع بعنوان طرق التحليل، وبه الطرق المختلفة لتحليل الشبكات الكهربية باستخدام طرق التحليل والمحددات والمصفوفات، والفصل الحادى عشر بعنوان الدوائر المتعددة الأوجه وبه تم التعرف على أنواع الدوائر المختلفة مع شرح وإفٍ للنظم ثلاثية الأوجه المترنة وغير المترنة، والفصل الثانى عشر وهو الاستجابة الترددية والمرشحات والرنين وبه تم شرح الاستجابة الترددية ودراسة الشبكات المختلفة ذات الإمرار العالى والمنخفض ودوال الشبكات والمرشحات المثالية والعملية وغير ذلك من دوائر الرنين.

هذا وقد تم تغيير جزئى فى بعض الفصول الأخرى من ناحية المادة العلمية لتكون أكثر إيضاحاً، فقد أضيف إلى الفصل الثالث عشر جزء جديد للتعرف على الأطراف والمداخل للشبكات ذات المدخلين وأيضاً معاملات الثابت Z والثابت Y ومكافئ T للشبكة المعكوسة. هذا وقد تم ترتيب أرقام المعادلات والأشكال فى الفصل الأول والثانى والثالث والرابع وأضيفت أيضاً مجموعة من المسائل المحلولة والجديدة على مدار الكتاب كله حتى يتم الفهم الكامل لفصوله المختلفة.

هذا وقد صدر الكتاب فى جزئين:

*** الجزء الأول** يحتوى على الفصول من الفصل الأول إلى الفصل التاسع.

*** والجزء الثانى** من الفصل العاشر إلى الفصل السابع عشر، كما يحتوى كل جزء على ملحق للكتاب به ثلاثة أقسام.

د. جمال عبد الخالق

المحتويات

صفحة	الفصل
9	الفصل العاشر : القدرة للتيار المتردد
9	10-1 القدرة في مجال الزمن
11	10-2 القدرة في الدوال الجيبية المستقرة
13	10-3 القدرة المتوسطة أو الحقيقية
15	10-4 القدرة الغير حقيقية
16	10-5 ملخص القدرة للتيار المتردد في دوائر C, L, R
19	10-6 تبادل الطاقة بين الملف والمكثف
20	10-7 القدرة المركبة والظاهريه ومثلث القوى
25	10-8 الشبكات المتصلة على التوازي
27	10-9 تحسين معامل القدرة
29	10-10 أقصى قدرة متوقعة
47	الفصل الحادي عشر : الدوائر المتعددة الأوجه
47	11-1 مقدمة
47	11-2 النظم ذات الوجهين
49	11-3 النظم ثلاثية الأوجه
51	11-4 نظم النجمة والدلتا
52	11-5 اتجاهات الجهود
53	11-6 حمل دلتا المتزن
54	11-7 حمل نجمة المتزن ذو أربعة أسلاك
56	11-8 التوسيلات المكافئة للنجمة والدلتا
56	11-9 تمثيل أحمال ثلاثية الأوجه المتزنة بدائرة مكافئة وجه واحد
58	11-10 حمل دلتا الغير متزن
59	11-11 حمل نجمة الغير متزن
61	11-12 القدرة في النظم ثلاثية الأوجه
62	11-13 قياس القدرة بطريقة إستخدام جهازى وأطيتر
79	الفصل الثاني عشر : الاستجابة الترددية والمرشحات والرنين
79	12-1 الإستجابة الترددية
81	12-2 الشبكات ذات الإمرار العالى وذات الإمرار المنخفض
85	12-3 ترددات نصف القدرة
86	12-4 الشبكات العامة ذات المنخفضين والعنصرين
87	12-5 الإستجابة الترددية ودوال الشبكة
89	12-6 الإستجابة الترددية من وضع قطب / صفر
90	12-7 المرشحات المثالية والعملية
92	12-8 المرشحات الغير فعالة والفعالة

93	12-9 مرشحات إمرار النطاق والرنين
95	12-10 التردد الطبيعي ونسبة الخمد
96	12-11 دوائر التوالي RLC ورنين التوالي
98	12-12 معامل الجودة
99	12-13 دائرة التوازي RLC - رنين التوازي
100	12-14 دائرة التوازي LC العملية
101	12-15 تحويلات دوائر التوالي والتوازي
102	12-16 أشكال المحل الهندسي
125	الفصل الثالث عشر : الشبكات ذات المدخلين
125	13-1 الأطراف والمدخل
125	13-2 معاملات Z
128	13-3 مكافئ T للشبكات المعكوسة
129	13-4 معاملات Y
131	13-5 مكافئ π للشبكات القابلة للعكس
131	13-6 تطبيقات على خواص الأطراف
133	13-7 التحويل بين معاملات Z ومعاملات Y
134	13-8 معاملات h (هجين)
135	13-9 معاملات g
136	13-10 معاملات النقل
137	13-11 توصيل شبكتين ذات مدخلين معاً
139	13-12 إختيار نوع المعامل
140	13-13 ملخص معاملات الأطراف والتحويلات
159	✓ الفصل الرابع عشر : البحث المتبادل والمحولات
159	14-1 البحث المتبادل
161	14-2 معامل التقارن
163	14-3 تحليل الملفات المتقارنة
164	14-4 قاعدة النقطة
166	14-5 الطاقة المخزنة في زوج من الملفات المتقارنة
167	14-6 الدوائر المكافئة المتقارنة الموصلة
168	14-7 المحول الخطي
171	14-8 المحول المثالي
173	14-9 المحول الذاتي
174	14-10 المعاوقة المتعكسة

197	الفصل الخامس عشر : تحليل الدائرة باستعمال برنامج محاكاة ذو الدائرة المتكاملة " Pspice, Spice "
197	Pspice, Spice 15-1
197	15-2 وصف الدائرة
199	15-3 تحليل ملف إدخال البيانات
200	15-4 بيانات الدائرة وتحليل التيار المستمر
206	15-5 بيانات التحكم والخرج في تحليل التيار المستمر
209	15-6 مكافئ ثنائيين
210	15-7 دوائر مكبر التشغيل OP AMP
213	15-8 الحالة المستقرة للتيار المتردد وتجاوب التردد
215	15-9 الحث المتبادل والمحولات
217	15-10 تمثيل النبائط ذات القيم المتغيرة
219	15-11 تجاوب الزمن والتحليل العابر
221	15-12 توصيف أنواع أخرى من المنابع
226	15-13 ملخص
245	الفصل السادس عشر : طريقة تحويل لابلاس
245	16-1 مقدمة
245	16-2 تحويلات لابلاس
246	16-3 تحويلات لابلاس المخفارة
249	16-4 تقارب التكامل
250	16-5 نظريتي القيمة الابتدائية والقيمة النهائية
251	16-6 مفكوك الكسور الجزئية
253	16-7 الدوائر في مجال S
273	الفصل السابع عشر : طريقة فوريير لتحليل أشكال الموجات
273	17-1 مقدمة
274	17-2 متواليات فوريير المثلثية
276	17-3 متواليات فوريير الأسية
278	17-4 أشكال الموجات المتعاقبة
281	17-5 الطيف الخطي
283	17-6 تركيبات أشكال الموجات
284	17-7 القيم الفعالة والقدرة
285	17-8 تطبيقات في تحليل الدائرة
289	17-9 تحويلات فوريير لأشكال الموجات الغير متعاقبة
292	17-10 خواص تحويل فوريير
293	17-11 الطيف المتصل

317	ملحق A : نظام الأعداد المركبة
317	A 1 الأعداد المركبة
317	A 2 المستوى المركب
317	A 3 المعامل المتجه
317	A 4 التمثيلات الأخرى للأعداد المركبة
318	A 5 جمع وطرح الأعداد المركبة
318	A 6 ضرب الأعداد المركبة
319	A 7 قسمة الأعداد المركبة
319	A 8 مرافق العدد المركب
321	ملحق B : المصفوفات والمحددات
321	B 1 المعادلات الآتية ومصفوفات الخواص
321	B 2 أنواع المصفوفات
323	B 3 حسابات المصفوفات
324	B 4 محدد المصفوفة المربعة
327	B 5 القيم الجذرية للمصفوفة المربعة
329	ملحق C : أمثلة توضيحية من معلم شاوم الإلكتروني

الفصل العاشر

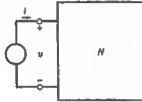
القدرة للتيار المتردد

10.1 القدرة في مجال الزمن

تعرف القدرة اللحظية الداخلة في دائرة N ذات طرفين شكل 10.1 بالتالى :

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (1)$$

حيث $v(t)$ ، $i(t)$ هما جهد وتيار المنبع على التوالي . وإذا كانت P موجبة فإن الطاقة تكون معطاه للدائرة وإذا كانت سالبة فإن الطاقة تكون مسترجعة من الدائرة للمنبع .



شكل 10-1

سيتناول هذا الفصل التيارات والجهدود الدورية ، وذلك بالتركيز على دوائر RLC الخنطية المستقرة . وحيث أن سعة التخزين للملف أو المكثف محدودة فإن هذه العناصر لا تستطيع تخزين الطاقة دون أن تعاد مرة أخرى . ولذلك فإنه فى الحالة المستقرة وأثناء كل دورة فإن كل الطاقة التى يستقبلها الملف أو المكثف تعاد مرة أخرى . ولكن فى الحالة المستقرة فإن الطاقة التى تستقبلها المقاومة تستهلك على شكل طاقة حرارية أو ميكانيكية أو كيميائية أو كهرومغناطيسية أو بأكثر من إحدى هذه الطاقات . وعلى ذلك فإن إجمالى سريان الطاقة فى الدائرة الغير الفعالة خلال الدورة الواحدة تكون موجبة أو صفراً .

مثال 10.1 : شكل 10-2(a) يبين شكل التيارات في مقاومة $2\text{ k}\Omega$. أوجد وارسم القدرة اللحظية $p(t)$.

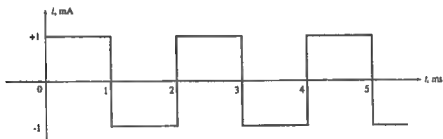
من $v = Ri$ نحصل على $1\text{ mW} = 10^{-3}\text{ W} = 1000 \times 10^{-6} = Ri^2 = v_i = p(t)$ انظر شكل 10-2(b) .

مثال 10.2 : يمر التيار في مثال 10.1 خلال المكثف $0.5\text{ }\mu\text{F}$. أوجد القدرة $p(t)$ الداخلة للمكثف والطاقة $w(t)$ الداخلة والطاقة $w(t)$ المخزنة فيه . افرض أن $v_c(0) = 0$ وارسم كلا من $w(t)$ ، $p(t)$.

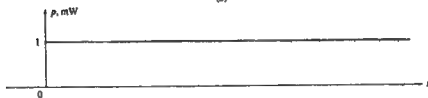
شكل 10-2(a) يبين أن التيار في المكثف عبارة عن دالة دورية بزمّن دورى $T = 2\text{ ms}$ وأثناء دورة واحدة كان التيار :

$$i = \begin{cases} 1\text{ mA} & (0 < t < 1\text{ ms}) \\ -1\text{ mA} & (1 < t < 2\text{ ms}) \end{cases}$$

ويكون أيضاً الجهد على المكثف دالة دورية ولها نفس الزمن الدورى T [شكل 10-3(a)] . ويكون الجهد في دورة تعاقبية كالتالى :



(a)



(b)

شكل 10-2

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt = \begin{cases} 2000t \text{ (V)} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ 4 - 2000t \text{ (V)} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases}$$

وأخيراً فإن القدرة الداخلة للمكثف والطاقة المخزنة كلاهما دوريان بـ زمن دورى (T) هي :

$$p(t) = vi = \begin{cases} 2000t \text{ (mW)} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ 2000t - 4 \text{ (mW)} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases} \quad [\text{Fig. 10-3(b)}]$$

$$w(t) = \frac{1}{2} Cv^2 = \begin{cases} t^2 \text{ (J)} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ t^2 + 4 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-3}t \text{ (J)} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases} \quad [\text{Fig. 10-3(c)}]$$

ومن جهة أخرى يمكن الحصول على $w(t)$ بتكامل $p(t)$. وتكون القدرة الداخلة للمكثف خلال دورة واحدة ذات قيم موجبة وسالبة متساوية [انظر شكل 10-3(b)] وتكون الطاقة المخزنة في المكثف دائماً موجبة كما هو مبين في شكل 10-3(b) والقدرة العظمى للمخزنة هي $W_{\max} = 10^{-6} \text{ J}$ عند $t = 1, 3, 4 \dots \text{ms}$.

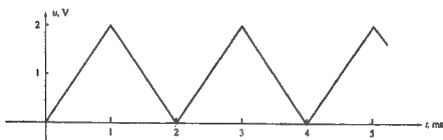
10-2 القدرة في الدوال الجيبية المستقرة

إذا تم توصيل جهد جيبى $v = v_m \cos \omega t$ على طرفى معاوقة $Z = |Z| \angle \theta$ فإنه سينشأ تيار $i = I_m \cos (\omega t - \theta)$ وتكون القدرة المعطاة للمعاوقة عند الزمن t هي :

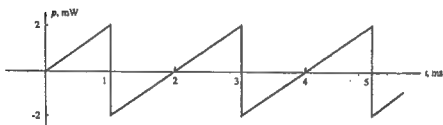
$$\begin{aligned} p(t) = vi &= V_m I_m \cos \omega t \cos (\omega t - \theta) = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos \theta + \cos (2\omega t - \theta)] \\ &= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} [\cos \theta + \cos (2\omega t - \theta)] \\ &= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \theta + V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos (2\omega t - \theta) \end{aligned}$$

حيث $V_{\text{eff}} = V_m / \sqrt{2}$ ، $I_{\text{eff}} = I_m / \sqrt{2}$. وتكون القدرة اللحظية في المعادلة (٢) تتكون من مركبة جيبية $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos (2\omega t - \theta)$ بالإضافة لقيمة ثابتة $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \theta$ والتي تصبح القدرة المتوسطة P_{avg} . وهذا مبين في شكل 10-4 . وأثناء جزء من الدورة فإن القدرة اللحظية تكون موجبة والتي تبين أن القدرة ينفذ الحمل . وأثناء باقى الذبذبة فإن القدرة اللحظية يمكن أن تكون

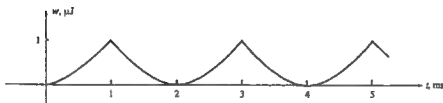
سالبة وهذا يعنى أنها تمر إلى خارج الحمل وبذلك تكون محصلة القدرة فى دورة واحدة ليست سالبة وتسمى القدرة المتوسطة .



(a)



(b)



(c)

شكل 10-3

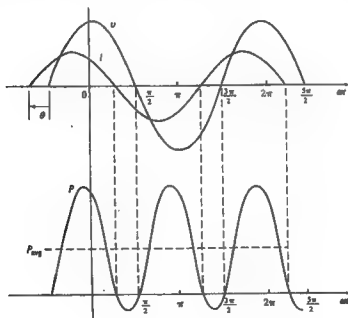
مثال 10.3 : وصل الجهد $v = 140 \cos 60t$ على طرفى المعاوقة $Z = 5 \angle -60^\circ$. أوجد $P(t)$.
ينشأ عن الجهد v التيار $i = 28 \cos (60t + 60^\circ)$ ومن ثم :

$$p(t) = vi = 140(28) \cos 60t \cos (60t + 60^\circ) = 980 + 1960 \cos (2\omega t + 60^\circ)$$

للقدرة اللحظية مركبة ثابتة قيمتها 980 W ومركبة جيبية ذات تردد ضعف تردد المنبع وشكل تغير p بالنسبة للزمن t يكون مشابهاً لشكل 10.4 مع اعتبار $\theta = -\pi/3$.

10.3 القدرة المتوسطة (أو الحقيقية)

القدرة المؤثرة أو المتوسطة $P_{avg} = \langle p(t) \rangle$. الداخلة الحمل أثناء دورة واحدة تسمى القدرة الحقيقية. وحيث أن القيمة المتوسطة للمقدار $\cos(\omega t - \theta)$ خلال دورة واحدة يكون صفراً فإننا نحصل من المعادلة (2) على:



شكل 10-4

$$P_{avg} = V_{eff} I_{eff} \cos \theta \quad (3)$$

إذا كان $Z = R + jX = |Z| \angle \theta$ فإن $\cos \theta = R / |Z|$ وبذلك يمكن التعبير عن القدرة المتوسطة بالقيمة:

$$P_{avg} = V_{eff} I_{eff} \frac{R}{|Z|} \quad (4)$$

$$(5) \quad P_{avg} = \frac{V_{eff}^2}{|Z|^2} R \quad \text{أو}$$

$$(6) \quad P_{avg} = R I_{eff}^2 \quad \text{أو}$$

وبذلك تكون القدرة المتوسطة ليست سالبة وهى تعتمد على V ، I وعلى زاوية الوجه بينهما
 وحينما تعطى قيم V_{eff} ، I_{eff} فإن القدرة P تكون قيم عظمى عند $\theta = 0$ وهذا يحدث فى الحمل المادى
 الخالص وبالنسبة لحمل الحثى الخالص فإن $\theta = 90^\circ$ وتكون $P_{avg} = 0$. وتسمى النسبة بين P_{avg} إلى
 $V_{eff} I_{eff}$ معامل القدرة pf . ومن معادلة (3) فإن هذه النسبة تكون مساوية لـ $\cos \theta$ وبذلك .

$$pf = \frac{P_{avg}}{V_{eff} I_{eff}} \quad 0 \leq pf \leq 1 \quad (7)$$

والترميز avg فى القدرة المتوسطة P_{avg} غالباً ما يحذف وستذكر فى باقى هذا الفصل الحرف P
 للدلالة على القدرة المتوسطة .

مثال 10.4 : أوجد P المعطاه من جهد جيبي له القيمة $v = 110$ إلى معاوقة $Z = 10 + j8$
 أوجد معامل القدرة .

$$Z = 10 + j8 = 12.81 / 38.7^\circ$$

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{Z} = \frac{110}{12.81 / 38.7^\circ} = 8.59 / -38.7^\circ \text{ A}$$

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos \theta = 110(8.59 \cos 38.7^\circ) = 737.43 \text{ W}$$

$$pf = \cos 38.7^\circ = 0.78$$

حل آخر :

$$\text{We have } |Z|^2 = 100 + 64 = 164. \text{ Then,}$$

$$P = V_{eff}^2 R / |Z|^2 = 110^2 (10) / 164 = 737.8 \text{ W}$$

ومن الحل الآخر نحصل على إجابة أدق .

10.4 القدرة الغير حقيقية

إذا احتوت شبكة غير فعالة على ملفات أو مكثفات أو كلاهما فإن الطاقة الداخلة إليها في دورة واحدة تختزن ثم تعود مرة أخرى إلى منبع . وأثناء رجوع الطاقة فإن القدرة تكون سالبة . وتسمى القدرة في هذه الحالة من التغيير قدرة غير فعالة أو قدرة متعامدة . وبالرغم من أن تأثير القدرة الكلية الغير فعالة يكون صفرأ . إلا أنها تؤثر في تشغيل نظم القدرة وتعرف القدرة الغير فعالة بالرمز Q كالتالى :

$$Q = V_{eff} I_{eff} \sin \theta \quad (8)$$

إذا كان $Z = R + jX = |Z| \angle \theta$ فإن $\sin \theta = X / |Z|$ وبالتالي تكون قيمة Q هى :

$$Q = V_{eff} I_{eff} \frac{X}{|Z|} \quad (9)$$

$$Q = \frac{V_{eff}^2}{|Z|^2} X \quad (10)$$

$$Q = XI_{eff}^2 \quad (11)$$

ووحدة القدرة الغير فعالة هى بالفولت أمبير غير فعال (فار) (var).

وتعتمد القدرة الغير فعالة Q على I ، V ، θ وزاوية الوجه بينهما . وهى حاصل ضرب الجهد مع مركبة التيار التى تصنع زاوية 90° مع الجهد . وتكون Q صفرأ حينما تكون $\theta = 0^\circ$ وهذا يحدث فى الحمل المادى الخالص حينما يكون V ، I فى نفس زاوية الوجه . وحينما يكون الحمل غير فعال تماماً وبالتالي فإن $\theta = 90^\circ$ وتصل Q إلى قيمتها العظمى لقيم I ، V المعطاه . ولاحظ أنه بينما P تكون دائماً غير سالبة فإنه يمكن اعتبار Q موجبة (للحمل الحثي حيث يتأخر التيار عن الجهد) وتعتبر سالبة (للحمل السعوى حيث يتقدم التيار الجهد . ومن المعتاد دائماً تمييز Q بقيمتها وبنوع الحمل . فمثلاً فإن 100-k var حتى تعنى أن $Q = 100\text{ k var}$ ، 100 kvar سموى تعنى $Q = -100\text{ kvar}$.

مثال 10.5 إذا كان الجهد والتيار لحمل هما $V_{eff} = 110\text{ V}$ ، $I_{eff} = 20\text{ A} \angle -50^\circ$. أوجد P ، Q .

$$P = 110(20 \cos 50^\circ) = 1414\text{ W} \quad Q = 110(20 \sin 50^\circ) = 1685\text{ var}$$

10.5 ملخص القدرة للتيار المتردد في دوائر C, L, R

ملخص قدرة التيار المتردد في المقاومات والملفات والمكثفات مذكورة في جدول 10-1 وقد استخدمنا الرموز V_{eff} ، I_{eff} لتشمل زوايا الوجه والعمود الأخير في جدول 10-1 هو $S = VI$ حيث S تسمى القدرة الظاهرية ومناقش S بتفصيل أكثر في بند 10.7 .

جدول 10-1

	Z	i	I_{eff}	$p(t)$	P	Q	S
R	R	$\frac{V\sqrt{2}}{R} \cos \omega t$	$\frac{V}{R} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{V^2}{R} (1 + \cos 2\omega t)$	$\frac{V^2}{R}$	0	$\frac{V^2}{R}$
L	$jL\omega$	$\frac{V\sqrt{2}}{L\omega} \cos(\omega t - 90^\circ)$	$\frac{V}{L\omega} \angle -90^\circ$	$\frac{V^2}{L\omega} \sin 2\omega t$	0	$\frac{V^2}{L\omega}$	$\frac{V^2}{L\omega}$
C	$\frac{-j}{C\omega}$	$V\sqrt{2}C\omega \cos(\omega t + 90^\circ)$	$VC\omega \angle 90^\circ$	$-V^2C\omega \sin 2\omega t$	0	$-V^2C\omega$	$V^2C\omega$

مثال 10.6 : أوجد القدرة المعطاة من منبع جيبي لمقاومة R . باعتبار القيمة الفعالة والتيار هما V ، I على التوالي .

$$p_R(t) = v i_R = (V\sqrt{2}) \cos \omega t (I\sqrt{2}) \cos \omega t = 2VI \cos^2 \omega t = VI(1 + \cos 2\omega t)$$

$$= RI^2(1 + \cos 2\omega t) = \frac{V^2}{R}(1 + \cos 2\omega t)$$

Thus, $P_R = \frac{V^2}{R} = RI^2 \quad Q = 0$

تتغير القدرة اللحظية الداخلة للمقاومة جيئاً بين القيمة صفراً والقيمة $2RI^2$ بتردد ضعف تردد المنبع وبقيمة متوسطة $P = RI^2$ وقد رسمت تغيرات $P(t)$ ، $v(t)$ في شكل 10-5(a) .

مسألة 10.7 : أوجد قدرة التيار المتردد الداخلة في الملف L.

$$= \frac{V^2}{L\omega} \sin 2\omega t$$

$$P = 0 \quad Q = VI = \frac{V^2}{L\omega} = L\omega I^2 \quad \text{وبذلك}$$

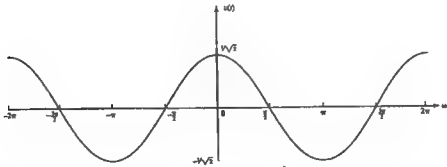
وتتغير القدرة اللحظية الداخلة للملف جيئياً بين القيمة Q ، -Q بضعف تردد المنبع وبقيمة متوسطة = صفراً انظر شكل 10-5(b).

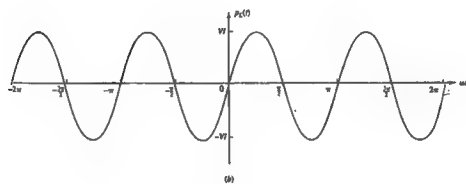
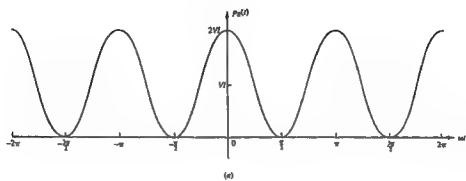
مسألة 10.8 : أوجد قدرة التيار المتردد المعطاه في المكثف C.

$$= -\frac{I^2}{C\omega} \sin 2\omega t$$

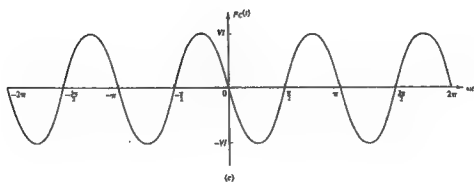
$$P = 0 \quad Q = -VI = -\frac{I^2}{C\omega} = -C\omega V^2 \quad \text{وبالمثل}$$

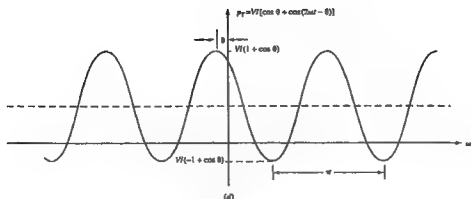
وبالمثل كما في الملف فإن تتغير القدرة اللحظية الداخلة للمكثف يكون جيئياً بين -Q ، Q بضعف تردد المنبع وقيمة متوسطة تساوى صفراً. انظر شكل 10-5(c).





شكل 5-10





شكل 5-10 (Cont.)

10.6 تبادل الطاقة بين الملف والمكثف

إذا تم تغذية ملف ومكثف متصلين على التوازي بنفس جهد التيار المتردد أو اتصالاً على التوالي بنفس منبع للتيار فإن القدرة الداخلة للمكثف تصنع الزاوية 180° بالنسبة للقدرة الداخلة للملف ويعبر عن ذلك بالإشارات المختلفة للقدرة الغير فعالة Q لكل من الملف والمكثف. وفي هذه الحالات سيتبادل كلا من الملف والمكثف الطاقة كل مع الآخر عن طريق منبع التيار المتردد. فيتبع ذلك بالتالي نقص للقدرة الغير فعالة المسحوبة من المنبع لمجموعة LC وبالتالي يحسن معامل القدرة. انظر بندي 10.8، 10.9.

مثال 10.9 : أوجد القدرة الكلية اللحظية $p(t)$ ، القدرة المتوسطة P والقدرة الغير فعالة Q التي يعطيها المنبع $v = (V\sqrt{2}) \cos \omega t$ لمجموعة التوازي RLC.

$$p_T = vi = v(i_R + i_L + i_C) = p_R + p_L + p_C \quad \text{: القدرة اللحظية الكلية}$$

وبالتعويض عن P_C ، P_L ، R_R التي حصلنا عليها من الأمثلة 10.6، 10.7، 10.8 على الترتيب فنحصل على:

$$p_T = \frac{V^2}{R}(1 + \cos 2\omega t) + V^2 \left[\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right) \sin 2\omega t \right]$$

$$P_T = P_R = V^2/R \quad \text{: القدرة المتوسطة هي}$$

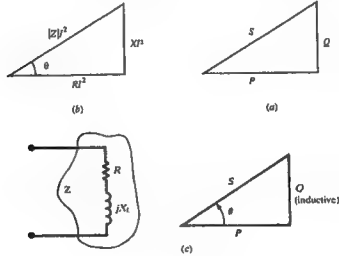
القدرة الغير فعالة هي :

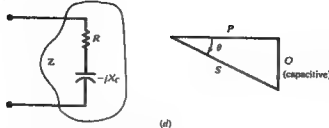
$$Q_r = Q_L + Q_C = V^2 \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right) \quad (12)$$

وفى حالة أن يكون $0 = C\omega - (1/L\omega)$ فإن القدرة الغير فعالة الكلية تساوى صفراً شكل 10-5(d) بين $P_T(t)$ لحمل ذو معامل قدرة متقدم .

10.7 القدرة المركبة والظاهرية ومثلث القوى

تلعب مركبة القدرة Q ، P أدوار مختلفة رغم أنهما لا يضافان إلي بعضهما ومع هذا فإنه يمكن تحصيلها معاً بشكل المتجهات الذى يسمى القدرة المركبة S وتعرف بالتالى : $S = P + jQ$ والقيمة $|S|$ تحصيلها معاً بشكل المتجهات الذى يسمى أيضاً بالقدرة الظاهرية ويعبر عنها بوحدات فولت أمبير (VA) والقيم الحسابية للثلاثة S ، P ، Q يمكن تمثيلها هندسياً بالوتر والضلع الأفقى والضلع الرأسى على التوالى لمثلث قائم الزاوية (يُسمى مثلث القوى) كم هو مبين فى شكل 10-6(a) . ويمكن أن يكون مثلث القوى هذا هو مثلث المعاوقات Z بقسمة كل ضلع منها على I_{eff}^2 كما هو مبين بشكل 10-6(b) ومثلث القدرة للحمل الحثى والحمل السعوى ميبان فى شكلى 10-6(c) ، (d) على التوالى :





شكل 10-6

ومن السهل إثبات أن $S = V_{eff} I_{eff}^*$ حيث V_{eff} هي القيمة المركبة الفعالة للجهد I_{eff}^* هو القيمة المركبة المرافقة للتيار الفعال. والعلاقة المكافئة هي $S = I_{eff}^2 Z$. وباختصار العلاقات السابقة نصل إلى:

(13)	$S = V_{eff} I_{eff}^* = P + jQ = I_{eff}^2 Z$	القدرة المركبة
(14)	$P = \text{Re}[S] = V_{eff} I_{eff} \cos \theta$	القدرة الحقيقية
(15)	$Q = \text{Im}[S] = V_{eff} I_{eff} \sin \theta$	القدرة الغير فعالة
(16)	$S = V_{eff} I_{eff}$	القدرة الظاهرية

مثال 10.10 : (أ) جهد جيبى له القيمة $V_{eff} = 10 \text{ V}$ متصل على طرفى المقاومة $Z = 1 + j$ كما هو مبين شكل 10-7(a) أوجد كلا من i_1 ، I_{1eff} ، P_1 ، Q_1 ، معامل القدرة pf_1 ، S . (ب) أعد حل الجزء (أ) بعد استبدال الحمل Z_1 بالحمل $Z_2 = 1 - j$ كما هو مبين شكل 10-7(b) . (ج) أعد حل الجزء (أ) بعد توصيل كلاً من Z_1 ، Z_2 معاً على التوازي كما هو مبين شكل 10-7(c) .

$$v = 10 \sqrt{2} \cos \omega t$$

(ا) انظر شكل 10-7(ا)

$$Z_1 = \sqrt{2} \angle -45^\circ$$

$$I_1 = 10 \cos(\omega t - 45^\circ)$$

$$I_{1,eff} = 5\sqrt{2} \angle -45^\circ$$

$$p_1(t) = (100\sqrt{2}) \cos \omega t \cos(\omega t - 45^\circ) \\ = 50 + (50\sqrt{2}) \cos(2\omega t - 45^\circ) \text{ W}$$

$$P_1 = V_{eff} I_{1,eff} \cos 45^\circ = 50 \text{ W}$$

$$Q_1 = V_{eff} I_{1,eff} \sin 45^\circ = 50 \text{ var}$$

$$S_1 = P_1 + jQ_1 = 50 + j50$$

$$S_1 = |S_1| = 50\sqrt{2} = 70.7 \text{ VA}$$

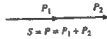
$$\text{pf}_1 = 0.707 \text{ lagging}$$



(a)



(b)



(c)

شكل 10-7

(ب) انظر شكل 10-7(ب)

$$Z_2 = \sqrt{2} \angle -45^\circ$$

$$I_2 = 10 \cos(\omega t + 45^\circ)$$

$$I_{2,eff} = 10\sqrt{2} \angle 45^\circ$$

$$p_2(t) = (100\sqrt{2}) \cos \omega t \cos(\omega t + 45^\circ) \\ = 50 + (50\sqrt{2}) \cos(2\omega t + 45^\circ) \text{ W}$$

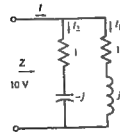
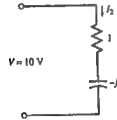
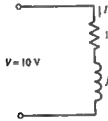
$$P_2 = V_{eff} I_{2,eff} \cos 45^\circ = 50 \text{ W}$$

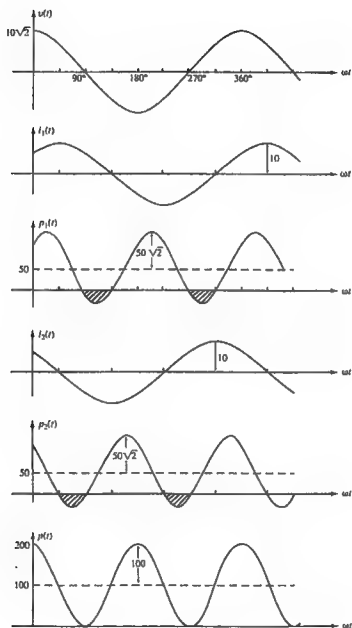
$$Q_2 = -V_{eff} I_{2,eff} \sin 45^\circ = -50 \text{ var}$$

$$S_2 = P_2 + jQ_2 = 50 - j50$$

$$S_2 = |S_2| = 50\sqrt{2} = 70.7 \text{ VA}$$

$$\text{pf}_2 = 0.707 \text{ leading}$$





(d)
شکل 10-7 (Cont.)

(ج) انظر شكل 10-7(c)

$$\begin{aligned}
 Z &= Z_1 \| Z_2 = \frac{(1+j)(1-j)}{(1+j) + (1-j)} = 1 \\
 i &= 10\sqrt{2} \cos \omega t \\
 I_{eff} &= 10 \\
 p(t) &= 200 \cos^2 \omega t = 100 + 100 \cos 2\omega t \text{ W} \\
 P &= V_{eff} I_{eff} = 100 \text{ W} \\
 Q &= 0 \\
 S &= P = 100 \\
 S &= |S| = 100 \text{ VA} \\
 pf &= 1
 \end{aligned}$$

يمكن استنتاج نتائج الجزء (ج) من ملاحظة أنه عند توصيل Z_1 ، Z_2 على التوازي ($Z_1 \| Z_2$) فإن $i = i_1 + i_2$ وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned}
 p(t) &= p_1(t) + p_2(t) \\
 &= [50 + (50\sqrt{2}) \cos (2\omega t - 45^\circ)] + [50 + (50\sqrt{2}) \cos (2\omega t + 45^\circ)] \\
 &= 100 + 100 \cos 2\omega t \text{ W} \\
 P &= P_1 + P_2 = 50 + 50 = 100 \text{ W} \\
 Q &= Q_1 + Q_2 = 50 - 50 = 0 \\
 S &= 100 < S_1 + S_2
 \end{aligned}$$

مثلثات القوى مبينة أشكال 10-7(a) ، (b) ، (c) . وشكل 10-7(d) يبين رسم علاقات v ، i ، p للأحمال الثلاثة .

مثال 10.11 : شبكة غير فعالة لها المعاوقة المكافئة $Z = 3 + j4\Omega$ وجهد منبع

$$v = 42.5 \cos (1000t + 30^\circ)$$

أوجد المعلومات الكاملة عن القدرة .

$$\begin{aligned}
 V_{eff} &= \frac{42.5}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ \text{ V} \\
 I_{eff} &= \frac{V_{eff}}{Z} = \frac{(42.5/\sqrt{2}) \angle 30^\circ}{5 \angle 53.13^\circ} = \frac{8.5}{\sqrt{2}} \angle -23.13^\circ \text{ A} \\
 S &= V_{eff} I_{eff}^* = 180.6 \angle 53.13^\circ = 108.4 + j144.5
 \end{aligned}$$

وبذلك فإن $P = 108.4 \text{ W}$ ، (حتى) $Q = 144.5 \text{ var}$ ، $S = 180.6 \text{ VA}$ ، ومعامل قدرة متأخر $\text{PF} = \cos 53.13^\circ = 0.6$.

10.8 الشبكات المتصلة على التوازي

تعتبر القدرة المركبة S ذات فائدة في تحليل الشبكات العملية فمثلاً فإن سحب القدرة المنزلية على نفس خطوط القدرة ممثلة كما في شكل 10-8 .

$$S_T = V_{eff} I_{eff}^* = V_{eff} (I_{1,eff}^* + I_{2,eff}^* + \dots + I_{n,eff}^*) \\ = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

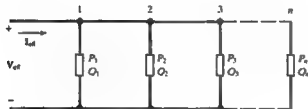
والتي منها:

$$P_T = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$$

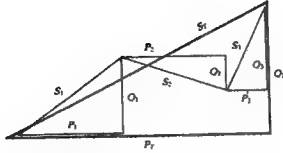
$$\text{pf}_T = \frac{P_T}{S_T}$$



شكل 10-8

هذه النتائج (والتي تصلح أيضاً للشبكات المتصلة على التوالي) توضح أن مثلث القوى للشبكة يمكن الحصول عليه بتوصيل مثلثات القوى لأفرعها المختلفة من وتر إلى وتر . وفي المثال المبين شكل 10-9 حيث $n = 3$ باعتبار الفروع 1 ، 3 حتى والفروع 2 سعوى . في هذا المخطط يمكن أن يتحول المثلث لمجرد خط مستقيم إذا كان أحد المركبتين R أو X صفراً .

وإذا كانت معلومات القدرة لكل فرع على حده ليست هامة فإنه يمكن استبدال الشبكة بالمساحة المكافئة وهي تستخدم مباشرة لحساب S_T .



شكل 10-9

مسألة 10.12 : وصلت ثلاث أحمال على التوازي لحظ جهده V_{eff} 6-k تيار متردد كما هو مبين بشكل 10-8 فإذا كان

تأخر $P_1 = 10 \text{ kW}$, $pf_1 = 1$, $P_2 = 20 \text{ kW}$, $pf_2 = 0.5$, $P_3 = 15 \text{ kW}$, $pf_3 = 0.6$ تأخر
أوجد pf_T , S_T , Q_T , P_T والتيار I_{eff} .

نوجد أولاً القدرة الغير فعالة لكل حمل.

$$\begin{aligned} pf_1 = \cos \theta_1 = 1 & \quad \tan \theta_1 = 0 & \quad Q_1 = P_1 \tan \theta_1 = 0 \text{ kvar} \\ pf_2 = \cos \theta_2 = 0.5 & \quad \tan \theta_2 = 1.73 & \quad Q_2 = P_2 \tan \theta_2 = 34.6 \text{ kvar} \\ pf_3 = \cos \theta_3 = 0.6 & \quad \tan \theta_3 = 1.33 & \quad Q_3 = P_3 \tan \theta_3 = 20 \text{ kvar} \end{aligned}$$

وبالتالى فإن pf_T , S_T , Q_T , P_T تكون :

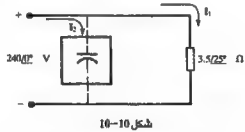
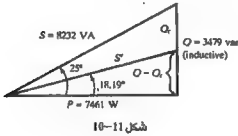
$$\begin{aligned} P_T &= P_1 + P_2 + P_3 = 10 + 20 + 15 = 45 \text{ kW} \\ Q_T &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 + 34.6 + 20 = 54.6 \text{ kvar} \\ S_T &= \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{45^2 + 54.6^2} = 70.75 \text{ kVA} \\ pf_T &= P_T / S_T = 0.64 = \cos \theta \quad \theta = 50.5^\circ \text{ lagging} \\ I_{eff} &= S / V_{eff} = (70.75 \text{ kVA}) / (6 \text{ kV}) = 11.8 \text{ A} \\ I_{eff} &= 11.8 / -50.5^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

ويمكن أيضاً إيجاد التيار $I = I_1 + I_2 + I_3$ ومع هذا فإن هذه الطريقة تستغرق وقتاً طويلاً.

10.9 تحسين معامل القدرة

يُغذى الاستهلاك الصناعي بدوائر ثلاثية الأوجه بينما يُغذى الاستهلاك المنزلى والتجارى بدوائر الوجه الواحد . ولما كان قياس الطاقة والمحاسبة يختلف عملياً لدى شركات توزيع الطاقة فإن عضو قياس ومحاسبة الطاقة عملياً بين هذه الاستخدامات فإن كبار المستهلكين يجدون أنه من الأفضل إنقاص المركبة المتعامدة للمقدرة فى مثلث القوى والتي تمثل القدرة الغير فعالة وهو ما يسمى «تحسين معامل القدرة» . وغالباً ما يكون للنظم الصناعية مركبة حثية كبيرة وذلك بسبب الأعداد الكبيرة من المحركات . وكل حمل على حده يمكن أن يكون إما مقاومة مادية خالصة ذو معامل قدرة الوحدة أو يكون مقاومة مع ممانعة حثية حيث يكون معامل القدرة متأخر . وحيث أن جميع الأحمال تتصل على التوازي فتكون المعاوقة المكافئة مؤدية لتيار متأخر وبالتالي لمركبة قدرة حثية Q_c . ولتحسين معامل القدرة فإنه يتم توصيل مكثفات فى الثلاث أوجه فى النظام إما فى الجهة الابتدائية أو الثانوية للمحول الرئيسى ، وبذلك فإن الحمل الكلى للمنشأة بالإضافة إلى تيارات المكثفات يودى إلى جعل قدرة المنبع تقترب من معامل القدرة الوحدة .

مسألة 10.13 : ما هى قيمة القدرة السعوية Q_c التى يجب إضافتها بالمكثف الموجود فى شكل 10-10 لتحسين معامل القدرة ليكون 0.95 تأخر .



قبل إضافة المكثف $C = 0.906$, $\text{pf} = \cos 25^\circ$ تأخر .

$$I_1 = \frac{240/\angle 0^\circ}{3.5/\angle 25^\circ} = 68.6/\angle -25^\circ \text{ A}$$

$$S = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}}^* = \left(\frac{240}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \right) \left(\frac{68.6}{\sqrt{2}} \angle +25^\circ \right) = 8232/\angle 25^\circ = 7461 + j3479$$

بعد التحسين يكون لثلث القوى نفس قيمة P ولكن تكون الزاوية $\theta = 18.19^\circ$ $\cos^{-1} 0.95$. (انظر شكل 10-11).

$$\frac{3479 - Q_c}{7461} = \tan 18.19^\circ \quad \text{or} \quad Q_c = 1027 \text{ var (capacitive)}$$

القيمة الجديدة للقدررة الظاهرية هي: $S' = 7854 \text{ VA}$ بالمقارنة بالقيمة السابقة $S = 8232$ والخفض 378 VA تعطى النسبة المئوية 4.6%.

تقدر القدرة للمحولات ونظم التوزيع ومولدات شركات إنتاج الطاقة بالقيم kVA أو MVA وبالتالي فإن التحسين فى معامل القدرة سيؤدى إلى خفض kVA فى التوليد أو الإرسال مما يؤدى إلى إمكانية استخدامها لخدمة مستهلكين آخرين وهذا هو السبب الكامن وراء حساب سعر أعلى لبعض المستهلكين بمعامل قدرة منخفض . والدراسة الاقتصادية لتكاليف المكثف المستخدم غالباً ما تثبت أفضلية استخدامها . وعموماً فإن نتائج مثل هذه الدراسة تبين ما إذا كان من الأفضل استخدام المكثف وما هو معامل القدرة الناتج.

مثال 10.14 : حمل $P = 1000 \text{ W}$ عند معامل قدرة تأخر $\text{pf} = 0.5$ يغذى من منبع 5-kV . وصل مكثف على التوازي لتحسين معامل القدرة إلى 0.8 . أوجد الخفض فى التيار المسحوب من المولد .

قبل التحسين

$$P = 1000 \text{ kW}, \cos \theta = 0.5, S = P / \cos \theta = 2000 \text{ kVA}, I = 400 \text{ A}$$

بعد التحسين

$$P = 1000 \text{ kW}, \cos \theta = 0.8, S = P / \cos \theta = 1250 \text{ kVA}, I = 250 \text{ A}$$

وبذلك فإنه لنفس القدرة الحقيقية فإن التيار سيتعامل بالقيمة :

$$37.5\% \text{ أو } (400 - 250) / 400 = 0.375$$

مثال 10.15 : وصل حمل رابع Q_4 على التوازي للثلاث أحمال التي في مثال 10.12 بحيث أصبح معامل القدرة الكلي 0.8 بينما بقيت القدرة الكلية كما هي . أوجد Q_4 والقيمة الناتجة للقدرة S ناقش التأثير على التيار .

وجدنا في مثال 10.12 كلاً من القدرة الحقيقية الكلية والغير حقيقية الكلية هما $P = P_1 + P_2 + P_3$ ، $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ على الترتيب . وعند التعويض أضفنا الحمل Q_4 (ومعه $P_4 = 0$) بحيث يكون معامل القدرة الجديد $\cos \theta = 0.8$ ، $Q = 36.87^*$ وبالتالي :

$$\tan 36.87^\circ = P/(Q + Q_4) = 45/(36.87 + Q_4) = 0.75 \quad Q_4 = -20.85 \text{ kvar}$$

تم تلخيص النتائج في جدول 10-2 ، وبإضافة حمل التعويض Q_4 تقلل القدرة الغير فعالة من 54.6 Kvar إلى 33.75 kvar ويحسن معامل القدرة وهذا أيضاً يقلل القدرة الظاهرية S من 70.75 kVA إلى 56.25 kVA وبالتالي يقل التيار بنفس النسب .

جدول 10-2

Load	P, kW	pf	Q, kvar	S, kVA
#1	10	1	0	10
#2	20	0.5 lagging	34.6	40
#3	15	0.6 lagging	20	25
#(1 + 2 + 3)	45	0.64	54.6	70.75
#4	0	1 leading	-20.85	20.85
Total	45	0.8	33.75	56.25

10.10 أقصى قدرة متقبولة

تكون القدرة المعطاة لحمل Z_1 من مولد جيبي ذو جهد عدم حمل V_g ومعاوقة داخلية $Z_g = R + jX$ ذات قيمة عظمى حينما تكون Z_1 مساوية للقيمة المركبة المرافقة للقيمة Z_g وحيث تكون $Z_1 = R - jX$. وبالتالي فإن متوسط القيمة العظمى المعطاة للحمل Z_1 هي $P_{\max} = V_g^2 / 4R$.



شكل 10-12

مسألة 10.16 : مولد له $V_g = 100 \text{ V (rms)}$ ، $Z_g = 1 + j$ يغذى حملاً $Z_1 = 2$ (شكل 10-12).

- (أ) أوجد القدرة المتوسطة P_{Z1} (المستهلكة في Z_1) والقدرة P_g (المستغلة في Z_g) ، P_T (التي يعطيها المولد) . (ب) أحسب قيمة حملاً ثانياً Z_2 بحيث حينما يتصل على التوازي مع Z_1 فإن المعاوقة الكلية تكون Z_g^* . (ج) مع توصيل Z_2 على التوازي مع Z_1 في (ب) أوجد القدرات P_{Z1} ، P_{Z2} (المستهلكة في Z_1 ، Z_2 على التوالي) ، P_g (المستهلكة في Z_g) و P_T (المستهلكة في المولد) .

$$|Z_1 + Z_g| = |2 + 1 + j| = \sqrt{10}. \text{ Thus } I = V_g / (Z_1 + Z_g) = 100 / (2 + 1 + j) \text{ and } |I| = 10\sqrt{10} \text{ A. (1)}$$

والقدرة المطلوبة هي

$$P_{Z1} = \text{Re}[Z_1] \times |I|^2 = 2(10\sqrt{10})^2 = 2000 \text{ W}$$

$$P_g = \text{Re}[Z_g] \times |I|^2 = 1(10\sqrt{10})^2 = 1000 \text{ W}$$

$$P_T = P_{Z1} + P_g = 2000 + 1000 = 3000 \text{ W}$$

(ب) ضع $Z_2 = a + jb$ ، ولإيجاد a ، b لجعل $Z_1 \parallel Z_2 = Z_g^* = 1 - j$ ، ومن ثم :

$$\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{2(a + jb)}{2 + a + jb} = 1 - j$$

ومنها $0 = a - b - 2$ ، $0 = a + b + 2$ ويحل هاتين المعادلتين الآتيتين فإن $a = 0$ ، $b = -2$ ،

وبالتعويض في المعادلة السابقة فإن $Z_2 = -j$.

(ج)

$Z = Z_1 \parallel Z_2 = 1 - j$ and $Z + Z_g = 1 - j + 1 + j = 2$. Then, $I = V_g / (Z + Z_g) = 100 / (1 - j + 1 + j) = 100 / 2 = 50 \text{ A}$, and so

$$P_g = \text{Re}[Z_g] \times I^2 = 1 \times 50^2 = 2500 \text{ W}$$

$$P_g = \text{Re}[Z_g] \times I^2 = 1 \times 50^2 = 2500 \text{ W}$$

لإيجاد P_{Z1} ، P_{Z2} نوجد أولاً V_Z على طرفي Z : $V_Z = IZ = 50(1 - j)$ ثم

$$I_{Z1} = V_Z / Z_1 = 50(1 - j) / 2 = (25\sqrt{2}) \angle -45^\circ$$

$$P_{Z1} = \text{Re}[Z_1] \times |I_{Z1}|^2 = 2(25\sqrt{2})^2 = 2500 \text{ W}$$

$$P_{Z2} = 0 \text{ W}$$

$$P_T = P_g + P_{Z1} = 5000 \text{ W}$$

وبالتالى يمكن تقرير أن :

$$P_{22} = 0 \quad \text{and} \quad P_{21} = P_z = 2500 \text{ W}$$

مسائل محلولة

10.1 التيار المرسوم فى شكل 10-2(a) يدخل المكثف $0.5 \mu\text{f}$ مع مقاومة على التوالى $1 \text{ k}\Omega$. أوجد وارسم (أ) الجهد v على طرفى مجموعة التوالى RC ، (ب) القدرة اللحظية p الداخلة إلى $R'C$ ، (ج) قارن النتائج مع مثالى 10.1 ، 10.2 .

(أ) بالرجوع إلى شكل 10-2(a) ولدورة واحدة للتيار فإن الجهود تكون :

$$v_R = \begin{cases} 1 \text{ V} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ -1 \text{ V} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases}$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt = \begin{cases} 2000t \text{ (V)} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ 4 - 2000t \text{ (V)} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases}$$

$$v = v_R + v_C = \begin{cases} 1 + 2000t \text{ (V)} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ 3 - 2000t \text{ (V)} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases} \quad [\text{See Fig. 10-13(a)}]$$

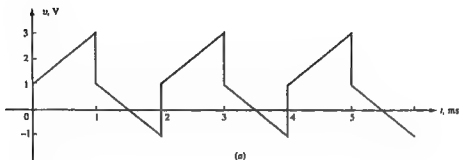
(ب) أثناء دورة واحدة .

$$p_R = Ri^2 = 1 \text{ mW}$$

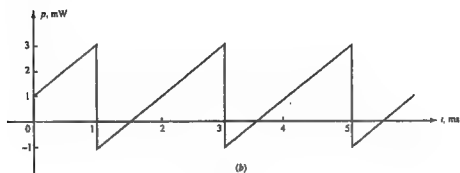
$$p_C = v_C i = \begin{cases} 2000t \text{ (mW)} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ 2000t - 4 \text{ (mW)} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases}$$

$$p = v i = p_R + p_C = \begin{cases} 1 + 2000t \text{ (mW)} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ 2000t - 3 \text{ (mW)} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases} \quad \{[\text{See Fig. 10-13(b)}]\}$$

(ج) القدرة المتوسطة الداخلة للدائرة خلال دورة واحدة تساوى متوسط القدرة المستهلكة فى المقاومة وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها فى مثال 10.7 وتبادل القدرة بين المنبع والدائرة خلال ذبذبة واحدة يتفق أيضاً مع الناتج الذى حصلنا عليه فى مثال 10.2 .



(a)



(b)

شكل 10-13

10.2 جهد متردد 1-V يغذي (أ) مقاومة 1Ω ، (ب) حملًا $z + 1$ ، (ج) حملًا $z - 1$. أوجد P لكل من هذه الحالات الثلاثة.

(a) $P = V^2/R = 1/1 = 1 \text{ W}$.

(b) $|Z| = |1 + j| = \sqrt{2}$. Then $P = V^2/|Z| = 1/\sqrt{2} = 0.707 \text{ W}$.

(c) $|Z| = |1 - j| = \sqrt{2}$. Then $P = V^2/|Z| = 1/\sqrt{2} = 0.707 \text{ W}$.

10.3 أوجد المعلومات الكاملة للقدرة لدائرة غير فعالة إذا استخدم معها الجهد

$v = 150 \cos(\omega t + 10^\circ) \text{ (V)}$ ، والتيار الناتج $i = 5.0 \cos(\omega t - 50^\circ) \text{ A}$

باستخدام القدرة المركبة.

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^* = \left(\frac{150}{\sqrt{2}} \angle 10^\circ \right) \left(\frac{5.0}{\sqrt{2}} \angle 50^\circ \right) = 375 \angle 60^\circ = 187.5 + j324.8$$

بالتالى فإن:

$$P = 187.5 \text{ W}, Q = 324.8 \text{ var (inductive)}, S = 375 \text{ VA}, \text{ and } pf = \cos 60^\circ = 0.50 \text{ lagging.}$$

10.4 عنصران لدائرة متصلان على التوالى لهما متوسط قدرة 940 W ومعامل قدرة 0.707 متقدم.

$$\text{حدد عنصرى الدائرة إذا كان الجهد المستخدم } V = 99.0 \cos(6000t + 30^\circ).$$

الجهد الفعال المستخدم هو $V = 99.0 / \sqrt{2} = 70 \text{ V}$ وبالتمويض فى $P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \theta$ فإن:

$$I_{\text{eff}} = 19.0 \text{ A} \quad \text{أو} \quad 940 = (70.0) I_{\text{eff}} (0.707)$$

ومن ثم $R = 2.6 \Omega$ إذن $(19.0)^2 R = 040$ ولعامل قدرة متقدم

$$\theta = \cos^{-1} 0.707 = 45^\circ \text{ ولذلك}$$

$$X_C = R \tan 45^\circ = 2.60 \Omega \text{ حيث } Z_1 = R - jX_C$$

$$\text{وأخيراً من } 2.60 = 1/\omega C, C = 64.1 \mu\text{F}$$

10.5 أوجد عنصرى التوالى فى الدائرة التى بها التيار $i = 4.24 \cos(5000t + 45^\circ) \text{ A}$ والقدرة

180 W ومعامل القدرة هو 0.80 متأخر.

$$\text{القيمة الفعالة للتيار } I_{\text{eff}} = 4.24 / \sqrt{2} = 3.0 \text{ A ومن ثم}$$

$$180 = (3.0)^2 R \quad \text{or} \quad R = 20.0 \Omega$$

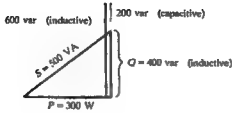
زاوية المعاوقة هى $\theta = \cos^{-1} 0.80 = +36.87^\circ$ ومن ثم فإن المنصر الثانى يجب أن يكون حثياً

ومن مثلث القوى.

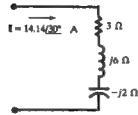
$$\frac{Q}{P} = \frac{I_{\text{eff}}^2 X_L}{180} = \tan 36.87^\circ \quad \text{or} \quad X_L = 15.0 \Omega$$

$$\text{وأخيراً من العلاقة } L = 5000 L = 3.0 \text{ mH فإن}$$

10.6 أوجد معلومات القدرة لكل عنصر فى شكل 10-14 وكون مثلث القدرة.



شكل 10-15



شكل 10-14

التيار الفعال هو $14.14 / \sqrt{2} = 10 \text{ A}$

$$P = (10)^2 \cdot 3 = 300 \text{ W} \quad Q_{\text{ind}} = (10)^2 \cdot 6 = 600 \text{ var (inductive)} \quad Q_{\text{cap}} = (10)^2 \cdot 2 = 200 \text{ var (capacitive)}$$

$$S = \sqrt{(300)^2 + (600 - 200)^2} = 500 \text{ VA} \quad pf = P/S = 0.6 \text{ lagging}$$

مثلث القوى مبين في شكل 10-15.

10.7 دائرة توألى بها $R = 10 \Omega$ ، $X_C = 5 \Omega$ بها منبع جهد 120 V أوجد المعلومات الكاملة عن القدرة.

$$Z = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11.18 \Omega \quad I_{\text{eff}} = \frac{120}{11.18} = 10.73 \text{ A}$$

Then:

$$P = I_{\text{eff}}^2 R = 1152 \text{ W} \quad Q = I_{\text{eff}}^2 X_C = 576 \text{ var (capacitive)} \quad S = \sqrt{(1152)^2 + (576)^2} = 1288 \text{ VA}$$

and $pf = 1152/1288 = 0.894 \text{ leading}$.

10.8 المعاوقات $Z_1 = 5.83 \angle -59.0^\circ \Omega$ ، $Z_2 = 8.94 \angle 63.34^\circ \Omega$ متصلة على التوالي ويمر بها التيار الفعال 5.0 A أوجد المعلومات الكاملة عن القدرة.

$$Z_T = Z_1 + Z_2 = 7.0 + j3.0 \Omega$$

$$\text{Hence,} \quad P_T = (5.0)^2 (7.0) = 175 \text{ W} \quad Q_T = (5.0)^2 (3.0) = 75 \text{ var (inductive)}$$

$$S_T = \sqrt{(175)^2 + (75)^2} = 190.4 \text{ VA} \quad pf = \frac{175}{190.4} = 0.919 \text{ lagging}$$

10.9 أوجد المعلومات الكاملة عن القدرة لدائرة التوازي المبينة شكل 10-16 .

بتقسيم التيار .

Then,

$$I_3 = 17.88 / 18.43^\circ \text{ A} \quad I_4 = 26.05 / -12.53^\circ \text{ A}$$

$$P_T = \left(\frac{17.88}{\sqrt{2}} \right)^2 (5) + \left(\frac{26.05}{\sqrt{2}} \right)^2 (4) = 2156 \text{ W}$$

$$Q_T = \left(\frac{17.88}{\sqrt{2}} \right)^2 (3) = 480 \text{ var (capacitive)}$$

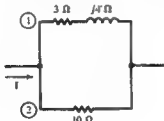
$$S_T = \sqrt{(2156)^2 + (480)^2} = 2209 \text{ VA}$$

$$pf = \frac{2156}{2209} = 0.976 \text{ leading}$$

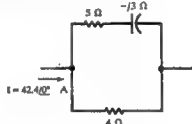
طريقة أخرى :

$$Z_{eq} = \frac{4(5-j3)}{9-j3} = 2.40 - j0.53 \text{ } \Omega$$

Then, $P = (42.4/\sqrt{2})^2 (2.40) = 2157 \text{ W}$ and $Q = (42.4/\sqrt{2})^2 (0.53) = 476 \text{ var (capacitive)}$.



شكل 10-17



شكل 10-16

10.10 أوجد معامل القدرة للدائرة المبينة شكل 10-17 .

بدون تحديد قيم معينة للجهد أو التيار فإن P ، Q ، S لا يمكن حسابها ومع ذلك فإن معامل القدرة

وجيب الزاوية للمعاوقة المكافئة ويمكن حسابها كالتالي :

$$Z_{eq} = \frac{(3+j4)(10)}{13+j4} = 3.68 / 36.03^\circ \text{ } \Omega$$

$$pf = \cos 36.03^\circ = 0.809 \text{ lagging}$$

10.11 إذا كانت القدرة الكلية فى الدائرة لشكل 10-17 هى 1100 W فما هى القدرة فى كل مقاومة .

بتقسيم التيار فإن

$$\frac{I_{1,eff}}{I_{2,eff}} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{10}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$\frac{P_{3\Omega}}{P_{10\Omega}} = \frac{I_{1,eff}^2(3)}{I_{2,eff}^2(10)} = \frac{6}{5}$$

and so

$$P_{10\Omega} = 500 \text{ W} , P_{3\Omega} = 600 \text{ W يعطى } P_{3\Omega} + P_{10\Omega} = 1100 \text{ W}$$

10.12 أوجد معامل القدرة لدائرة توازى ذات فرعين حيث أن الفرع الأول $Z_1 = 2 + j4 \Omega$ والثانى

$$Z_2 = 6 + j0 \Omega . \text{ وإلى أى قيمة تتغير المقاومة } 6 \Omega \text{ ليتبع معامل قدره } 0.90 \text{ تأخر .}$$

حيث أن زاوية المسامحة المكافئة هى سالب زاوية المعاوقة المكافئة فإن جيب التمام يكون له نفس القيمة أى معامل القدرة .

$$Y_{eq} = \frac{1}{2 + j4} + \frac{1}{6} = 0.334 / -36.84^\circ \text{ S}$$

$$pf = \cos(-36.84^\circ) = 0.80 \text{ lagging}$$

يكون معامل القدرة متأخر لأن زاوية المعاوقة موجبة .

والآن عند تغيير معامل القدرة إلى 0.90 فإن زاوية المسامحة يجب أن تكون

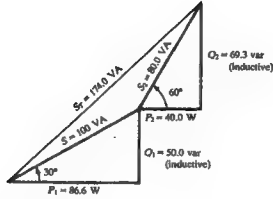
$$0.90 = \cos^{-1} -25.84^\circ . \text{ وبالتالي :}$$

$$Y'_{eq} = \frac{1}{2 + j4} + \frac{1}{R} = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{R} \right) - j \frac{1}{5}$$

$$\text{requires } \frac{1/5}{\frac{1}{10} + \frac{1}{R}} = \tan 25.84^\circ \quad \text{or} \quad R = 3.20 \Omega$$

10.13 وصل جهد $V = 28.28 \angle 60^\circ$ لدائرة توازى ذات فرعين بها $Z_1 = 4 \angle 30^\circ \Omega$ ،

$Z_2 = 5 \angle 60^\circ \Omega$. أوجد مثلث القوى للفرعين وإدجمهما فى مثلث القوى الكلى .



شكل 10-18

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = 7.07 \angle 30^\circ \text{ A} \quad I_2 = \frac{V}{Z_2} = 5.66 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$S_1 = \left(\frac{28.28}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ \right) \left(\frac{7.07}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ \right) = 100 \angle 30^\circ = 86.6 + j50.0$$

$$S_2 = \left(\frac{28.28}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ \right) \left(\frac{5.66}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \right) = 80.0 \angle 60^\circ = 40.0 + j69.3$$

$$S_T = S_1 + S_2 = 126.6 + j119.3 = 174.0 \angle 43.3^\circ \text{ VA}$$

مثلاً القوى ومجموعهما مبين في شكل 10-18 .

10.14 أوجد المعلومات الكاملة للقذرة الكلية لثلاث أحمال متصلة على التوازي الحمل # 1 250 VA ،

معامل قدرة 0.5 تأخر ، الحمل # 2 180 W معامل قدرة 0.80 تقدم ، الحمل # 3 300 VA ، 100 var (حثي) .

أحسب القذرة المتوسطة P والقذرة الغير فعالة Q لكل حمل .

Given $S = 250 \text{ VA}$, $\cos \theta = 0.50$ lagging. Then,

$$P = 250(0.50) = 125 \text{ W} \quad Q = \sqrt{(250)^2 - (125)^2} = 216.5 \text{ var (inductive)}$$

حمل # 1

Given $P = 180 \text{ W}$, $\cos \theta = 0.80$ leading. Then, $\theta = \cos^{-1} 0.80 = -36.87^\circ$ and

$$Q = 180 \tan (-36.87^\circ) = 135 \text{ var (capacitive)}$$

حمل # 2

Given $S = 300 \text{ VA}$, $Q = 100 \text{ var (inductive)}$. Then,

$$P = \sqrt{(300)^2 - (100)^2} = 282.8 \text{ W}$$

حمل # 3

ويتجميع العوامل المشابهة فإن :

$$P_T = 125 + 180 + 282.8 = 587.8 \text{ W}$$

$$Q_T = 216.5 - 135 + 100 = 181.5 \text{ var (inductive)}$$

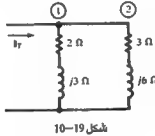
$$S_T = 587.8 + j181.5 = 615.2 \angle 17.16^\circ$$

$$S_T = 615.2 \text{ VA and pf} = \cos 17.16^\circ = 0.955 \text{ lagging.}$$

ولذلك فإن

10.15 أوجد المثلث الكامل للقوى والتيار الكلى لدائرة التوازي المبين شكل 10-19 إذا كان للفرع

$$. S_2 = 1490 \text{ VA} . 2$$



شكل 10-19

$$\text{From } S_2 = I_{2,\text{eff}}^2 Z_2,$$

$$I_{2,\text{eff}}^2 = \frac{1490}{\sqrt{3^2 + 6^2}} = 222 \text{ A}^2$$

ويتقسيم التيار

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{3 + j6}{2 + j3}$$

$$\text{whence } I_{1,\text{eff}}^2 = \frac{3^2 + 6^2}{2^2 + 3^2} I_{2,\text{eff}}^2 = \frac{45}{13} (222) = 768 \text{ A}^2$$

Then,

$$S_1 = I_{1,\text{eff}}^2 Z_1 = 768(2 + j3) = 1536 + j2304$$

$$S_2 = I_{2,\text{eff}}^2 Z_2 = 222(3 + j6) = 666 + j1332$$

$$S_T = S_1 + S_2 = 2202 + j3636$$

$$P_T = 2202 \text{ W, } Q_T = 3636 \text{ var (inductive),}$$

ومن ثم

$$S_T = \sqrt{(2202)^2 + (3636)^2} = 4251 \text{ VA and pf} = \frac{2202}{4251} = 0.518 \text{ lagging}$$

وحيث أن زاوية الوجه للجهد غير معروفة فإنه يمكن فقط إيجاد I_T . ويتقسيم التيار.

$$I_2 = \frac{2 + j3}{5 + j9} I_T \quad \text{or} \quad I_{2,\text{eff}}^2 = \frac{2^2 + 3^2}{5^2 + 9^2} I_{T,\text{eff}}^2 = \frac{13}{106} I_{T,\text{eff}}^2$$

$$I_{T,eff}^2 = \frac{106}{13} (222) = 1811 \text{ A}^2 \quad \text{or} \quad I_{T,eff} = 42.6 \text{ A}$$

10-16 أوجد مثلث القوى الكامل للدائرة المبينة شكل 10-20 إذا كانت القدرة الغير فعالة الكلية 2500 var (حثي). أوجد قدرات الأفرع P_2 ، P_1 .

من الأفضل إجراء حسابات عن طريق المسامحة المكافئة وذلك للحصول على مثلث القوى الكلى .

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 = 0.2488 / -39.57^\circ \text{ S}$$

Then,

$$P_T = 2500 \cot 39.57^\circ = 3025 \text{ W}$$

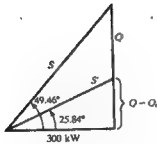
$$S_T = 3025 + j2500 = 3924 / 39.57^\circ \text{ VA}$$

معامل القدرة $pf = P_T / S_T = 0.771$ تأخر .

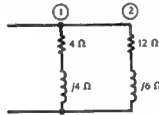
نسبة التيار $I_1 / I_2 = Y_1 / Y_2 = 0.177 / 0.0745$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1^2(4)}{I_2^2(12)} = 1.88 \quad \text{and} \quad P_1 + P_2 = 3025 \text{ W}$$

ومنها $P_2 = 1050 \text{ W}$ ، $P_1 = 1975 \text{ W}$



شكل 10-21



شكل 10-20

10.17 حمل قيمته 300 kW ومعامل قدرته 0.65 تأخر حُسِّن معامل قدرته ليكون 0.90 تأخر بمكثفات على التوازي كم تكون القدرة بوحدة Kvar يجب أن تعطى هذه المكثفات وما هى النسبة المثوية للخفض فى القدرة الظاهرية؟

نحصل أولاً على الزوايا المناظرة لمعامل القدرة.

$$\cos^{-1} 0.65 = 49.46^\circ \quad \cos^{-1} 0.90 = 25.84^\circ$$

ثم (انظر شكل 10-21).

$$Q = 300 \tan 49.46^\circ = 350.7 \text{ kvar (inductive)}$$

$$Q - Q_c = 300 \tan 25.84^\circ = 145.3 \text{ kvar (inductive)}$$

لذلك $Q_c = 205.4 \text{ kvar}$ (معوى) ولذلك:

$$S = \frac{300}{0.65} = 461.5 \text{ kVA} \quad S' = \frac{300}{0.90} = 333.3 \text{ kVA}$$

وبذلك يكون الخفض

$$\frac{461.5 - 333.3}{461.5} (100\%) = 27.8\%$$

10.18 أوجد قيمة المكثف C اللازم لتحسين معامل القدرة ليكون 0.95 في الدائرة المبينة شكل 10-22.

إذا كان الجهد للدائرة 120 V والتردد 60 Hz.

طريقة المسامحة هي الأفضل في الحل.

$$Y_{eq} = j\omega C + \frac{1}{20/30^\circ} = 0.0433 - j(0.0250 - \omega C) \text{ (S)}$$

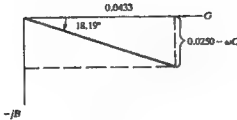
مخطط المسامحات مبين في شكل 10-23 ويؤدي للمخطوطة التالية:

$$\theta = \cos^{-1} 0.95 = 18.19^\circ$$

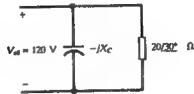
$$0.0250 - \omega C = (0.0433)(\tan 18.19^\circ)$$

$$\omega C = 0.0108$$

$$C = 28.6 \mu F$$



شكل 10-23



شكل 10-22

10.19 دائرة بها المعاوقة $Z = 10.0 \angle 60^\circ \Omega$ وتم تحسين معامل القدرة لها بمكثف على التوازي بممانعته السعوية $20 \mu\text{F}$. ما هي السعة المثوية للخفض للتيار الناتج؟

حيث أن $VY = I$ فإننا نخفض في التيار يمكن الحصول عليه من نسبة المسامحات قبل وبعد إضافة المكثفات.

$$Y_{\text{before}} = 0.100 / \angle -60^\circ \text{ S} \quad \text{and} \quad Y_{\text{after}} = 0.050 / \angle 90^\circ + 0.100 / \angle -60^\circ = 0.062 / \angle -36.20^\circ \text{ S}$$

$$\frac{I_{\text{after}}}{I_{\text{before}}} = \frac{0.062}{0.100} = 0.620$$

وبذلك تكون نسبة الخفض 38 %.

10-20 إذا كان معدل القدرة العظمى لمحول 25 KVA ويغذى جملاً 12 kW عند معامل قدرة 0.60 تأخر ما هي النسبة المثوية التي يمثلها هذا الحمل بالنسبة لقدرة المحول؟ وما هي كمية القدرة (kW) التي يجب أن تضاف للحمل ذو معامل القدرة الوحدة حتى يصل المحول إلى قدرته المثوية؟

للحمل 12 kW ، $20 \text{ KVA} = 12 / 0.60 = 20$ S وبذلك يكون المحول عند $(100\%) (20/25)$ 80% من الحمل الكامل.

وإضافة حمل جديد عند معامل قدرة الوحدة لا يغير في القدرة الغير فعالة .

$$Q = \sqrt{(20)^2 - (12)^2} = 16 \text{ kvar (inductive)}$$

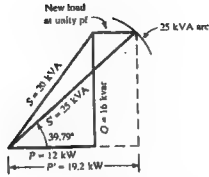
وبذلك عند القدرة العظمى للمحول فإن :

$$\theta' = \sin^{-1} (16/25) = 39.79^\circ$$

$$P' = 25 \cos 39.79^\circ = 19.2 \text{ kW}$$

$$P_{\text{add}} = 19.2 - 12.0 = 7.2 \text{ kW}$$

لاحظ أن القيمة العظمى بوحدات KVA مبنية شكل 10-24 عن طريق منحني دائرة نصف قطرها 25 يقطع الخط الأفقي الذي يبين القيمة الجديدة للحمل عن معامل القدرة الوحدة .



شكل 10-24

10-21 بالرجوع إلى مسألة 10-20 إذا كان الحمل الإضافي معامل قدرته 0.866 تقدم ما هي قيمته KVA التي تضاف بدون زيادة قدرة المحول؟

القدرة الأصلية $S = 12 + j 16$ KVA ويكون الحمل المضاف .

$$S_2 = S_1 \angle -30^\circ = S_1(0.866) - jS_1(0.500) \quad (\text{kVA})$$

القدرة الكلية هي $S_T = (12 + j 0.866 S_2) + j (16 - 0.500 S_2)$ KVA ثم

$$S_T^2 = (12 + 0.866 S_2)^2 + (16 - 0.500 S_2)^2 = (25)^2$$

والتي تعطى $S_2 = 12.8$ KVA .

10-22 محرك تأثيري له قدرة طرح فرملية 1.5 kW وجودة 85% وكان معامل القدرة عند هذا الحمل 0.80 تأخر . أوجد معلومات قدرة الدخول .

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = 0.85 \quad \text{or} \quad P_{in} = \frac{1.5}{0.85} = 1.765 \text{ kW}$$

من مثلث القوى

$$S_{in} = \frac{1.765}{0.80} = 2.206 \text{ kVA} \quad Q_{in} = \sqrt{(2.206)^2 - (1.765)^2} = 1.324 \text{ kvar (inductive)}$$

نحتوى الدائرة للمحرك التأثيري على مقاومة متغيرة كدالة في الحمل على محور الدوران وبذلك يكون معامل القدرة متغيراً من القيمة 0.30 عند بدء الحركة إلى القيمة 0.85 عند الحمل الكامل .

مسائل إضافية

10-23 دائرة بها الجهد $v = 14.14 \cos \omega t$ (V) والذي ينشأ عنه التيار $i = 19.1 \cos (\omega t - 14.05^\circ)$ mA أوجد مثلث القوى الكامل .

الجواب : تأخر $pf = 0.970$ (حتى) $P = 117 \text{ mW}$, $Q = 29.3 \text{ mvar}$

10-24 دائرة بها الجهد $v = 340 \sin (\omega t - 60^\circ)$ V والتيار $i = 13.3 \sin (\omega t - 48.7^\circ)$ A أوجد مثلث القوى الكامل . الجواب : (سعى) $P = 2217 \text{ W}$, $Q = 443 \text{ var}$ تقدم $pf = 0.891$.

10-25 دائرة توالى ذات عنصرين بها $R = 5.0 \Omega$, $X_L = 15.0 \Omega$ وجهد منبع $V = 31.6$ على طرفي المقاومة . أوجد القدرة المركبة ومعامل القدرة .
الجواب : تأخر 0.316 VA , $600 + j 200$.

10-26 دائرة فيها المعاوقة 6.0Ω ز - $Z = 8.0$ وجهد قيمته المتجهة $V = 70.7 \angle -90^\circ$ أوجد القيم الكاملة لثلث القدرة .

الجواب : (سعى) $P = 200 \text{ W}$, $Q = 150 \text{ var}$ $pf = 0.8$ تأخر .

10-27 أوجد معاوقة الدائرة التى فيها القدرة المركبة $VA = 5031 \angle -26.57^\circ$ ، لجهود قيمته المتجهة $V = 212.1 \angle 0^\circ$. الجواب : 2.0Ω ز - 4.0 .

10-28 أوجد المعاوقة المناظرة لقدرة ظاهرية 2500 VA ومعامل قدرة 0.76 تأخر وقيمة التيار الفعال $A = 18.0$. الجواب : $10.8 \angle 40.54^\circ \Omega$.

10-29 دائرة توازى ذات فرعين بها $Z_1 = 10 \angle 0^\circ \Omega$ ، $Z_2 = 8.0 \angle -30.0^\circ \Omega$ وتيارها الكلى $i = 7.07 \cos (\omega t - 90^\circ)$ (A) أوجد القيم الكلية لثلث القوى .

الجواب : تقدم $pf = 0.958$ و (سعى) $P = 110 \text{ W}$, $Q = 32.9 \text{ var}$

10-30 دائرة توازى ذات فرعين بها 5.0Ω ز - 2.0Ω ، $Z_1 = 1.0 \Omega$ ز + 1.0Ω أوجد مثلث القوى الكامل للدائرة إذا كانت المقاومة 2.0Ω تستهلك 20 W .

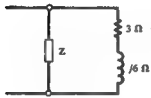
الجواب : تأخر $pf = 0.867$ (حتى) ، $P = 165 \text{ W}$, $Q = 95 \text{ var}$

10-31 دائرة توازي ذات فرعين بها $Z_1 = 4.0 \angle -30^\circ \Omega$ ، $Z_2 = 5.0 \angle 60^\circ \Omega$. وجهد منبع قيمته الفعالة 20 V أوجد مثلثات القوى للفرعين وأيضاً للمجموعة .

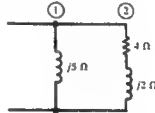
الجواب : تأخر $S_T = 128.1 \text{ VA}$, $pf = 0.989$

10-32 أوجد القدرة المركبة للدائرة كلها المبينة شكل 10-25 إذا كان الفرع 1 يأخذ 80 kvar .

الجواب : تأخر $S = 8 + j 12 \text{ KVA}$, $pf = 0.555$



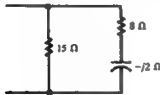
شكل 10-26



شكل 10-25

10-33 في الدائرة المبينة شكل 10-26 أوجد قيمة Z إذا كان $S_T = 3373 \text{ W}$ ومعامل قدرة 0.938 تقدم والمقاومة 3Ω تستهلك قدرة متوسطة 666 W . الجواب : $2 = z$.

10-34 دائرة التوازي المبينة شكل 10-27 قدرتها المتوسطة الكلية 1500 W . أوجد معلومات مثلث القوى الكلى . الجواب : تأخر $S = 1500 + j 2471 \text{ VA}$, $pf = 0.519$



شكل 10-28



شكل 10-27

10-35 أوجد القدرة المتوسطة في المقاومتين 15Ω ، 8Ω في شكل 10-28 إذا كان متوسط القدرة الكلية في الدائرة 2000 W . الجواب : 723 W , 1277 W .

10 دائرة توازى ذات ثلاث أفرع بها $Z_3 = 15 \angle 90^\circ \Omega$ ، $Z_2 = 15 \angle 60^\circ \Omega$ ، $Z_1 = 25 \angle 15^\circ \Omega$. أوجد القدرة الظاهرية الكلية ومعامل القدرة الكلى . الجواب :
تأخر 0.966 ، 4291 VA .

10- أوجد مثلث القوى الكامل للأحمال التالية المتصلة على التوازى حمل 1 5 kW ، $\text{pf} = 0.8$ ،
تأخر ، حمل 2 (سعى) 4 kvar ، 2 kvar (سعى) ، حمل 3 3.6 KVA ، $\text{pf} = 0.90$. الجواب : تأخر 0.954 ، 14.535 KVA .

10- أوجد القدرة لمثلث القوى الكامل للأحمال الثلاثة التالية المتصلة على التوازى : حمل 1
تأخر 0.7 ، 1200 VA ، حمل 2 تأخر 0.5 ، 2350 VA ، حمل
3 3275 VA ، $\text{pf} = 1.00$. الجواب : تأخر 0.799 ، 444 VA ، $S = 590$.

10- حمل قيمته 4500 VA عند معامل القدرة متأخر 0.75 يغذى منبع 240 V عند التردد 60 Hz .
أوجد قيمة مكثف التوازى بالميكروفاراد اللازم لتحسين معامل القدرة إلى 0.90 (أ) تأخر ، (ب)
 0.90 تقدم . الجواب : (أ) $61.8 \mu\text{F}$ ، (ب) $212 \mu\text{F}$.

10-4 فى المسألة 10-39 ما هى النسبة المثوية لخفض التيار والقدرة الكلية التى نتجت فى الجزء (أ)؟
وما هى القيمة الإضافية للخفض الناتج فى الجزء (ب) الجواب : 16.1% ، لا شيء .

10-4 بإضافة 20 kvar عن طريق مكثف حسن معامل القدرة لحمل ما ليكون 0.90 تأخر أوجد القدرة
المركبة قبل إضافة المكثف إذا كانت القدرة الظاهرية النهائية 185 KVA .
الجواب : $S = 166.5 + j 100.6 \text{ KVA}$.

10-4: حمل قيمته 25 KVA لمعامل قدرة 0.80 تأخر أضيفت له مجموعة من المقاومات كأجزاء
حرارية عند معامل القدرة الوحدة . ما هى كمية الطاقة (kW) التى تستهلكها هذه المقاومات إذا
كان معامل القدرة الجديد 0.85 تأخر . الجواب : 4.2 kW .

10-4: محول 500 KVA معامل قدرته عند الحمل الكامل 0.60 تأخر أضيف له مكثف لتحسين
معامل القدرة لتصل إلى 0.90 تأخر . ما هى النسبة المثوية لقدرة المحول (KVA) بعد التحسين .
الجواب : 66.7% .

10-44 محول 100 KVA يعمل عند 80% من الحمل الكامل عند معامل القدرة 0.85 تأخر ما قيمة القدرة KVA التي تضاف عند معامل القدرة 0.60 تأخر لتصل بالمحول إلى حملة الكامل؟
الجواب 21.1 KVA .

10-45 محول 250 KVA معامل قدرته عند الحمل الكامل 0.80 تأخر (أ) ما قيمة قدرة المكثفات (kvar) التي يجب أن تضاف لتحسين معامل القدرة إلى 0.90 تأخر . بعد تحسين معامل القدرة أضيف حمل جديد بمعامل قدرة 0.5 تأخر . ما قيمة القدرة المضافة (KVA) لهذا الحمل الجديد لتصل بالمحول مرة أخرى إلى قدرته المقتنة وما هو معامل القدرة النهائي؟ الجواب : (أ) (سعوى) 53.1 kvar ، (ب) تأخر 0.867 ، 33.35 KVA .

10-46 حمل قيمته 65 KVA بمعامل قدرة متأخر اتصل بمحرك توافقي 25 KVA يعمل عند معامل القدرة 0.60 . تقدم أوجد معامل قدرة الحمل 65 KVA إذا كان معامل القدرة الكلي 0.85 تأخر .
الجواب : 0.585 تأخر .

10-47 حمل عبارة عن محرك تأثيري 2000 KVA بمعامل قدرته 0.8 تأخر . أضيفت محركات توافقية 500 KVA عند معامل قدرة تقدم فإذا وصل معامل القدرة الكلي حيثئذ إلى 90% تقدم فما هو معامل قدرة للمحركات التوافقية . الجواب : 0.92 تقدم .

الفصل الحادى عشر

الدوائر المتعددة الأوجه

11-1 مقدمه

القدرة اللحظية التى يعطيها منبع جيى لمقاوة هى :

$$p(t) = v(t)i(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos (2\omega t - \theta) \quad (1)$$

حيث V_p ، I_p هى القيم الفعالة (rms) لكل من v ، i على الترتيب و θ هى الزاوية بينهما .
وتتذبذب القدرة بين $V_p I_p (1 + \cos \theta)$ ، $V_p I_p (-1 + \cos \theta)$. وفى نظم القوى وبالأخص عند القدرات العالية يكون من الأفضل الحصول على قدرة مستقرة منقولة من المنبع إلى الحمل . ولهذا السبب نستخدم النظم متعددة الأوجه . الأوجه المتعددة والميزة الأخرى أنه يمكن الحصول على أكثر من جهد على الخطوط . وفى نظم الأوجه المتعددة V_p ، I_p ترمز إلى الجهد والتيار الوجهى على الترتيب التى يمكن أن تختلف عن قيم الجهد والتيار فى الأوجه الأخرى . ويتعامل هذا الفصل أساساً مع دوائر الثلاث أوجه والتى تستخدم فى الصناعة ومع هذا فسيقدم أمثلة لدوائر ذات وجهين .

11-2 النظم ذات الوجهين

المولد المتزن ذو الوجهين له جهدين كلاهما له نفس القيمة المعظمى والتردد ولكن زاوية الوجهين هما 90° أو 180° . ولهذا النظام فائدة إمكانية إعطاء المستخدم اختيار جهدين ومجالين مغناطيسيين والقدرة المنقولة يمكن أن تكون ثابتة أو على شكل دفعات .

مثال 11-1 : مولد تيار متغير يحتوى على جهدين للمنع لهما نفس القيمة العظمى والتردد ولكن زاوية الوجه بينهما 90° . وتم توصيل الجهدين ليكونا منبعين لهما نفس خط الرجوع بطرف مقارن واحد هو n . يقوم النظام بتغذية حملين (شكل 11-1(a)) أوجد التيارات الجهود والقدرة اللحظية والمتوسطة المعطاه .

الجهود والتيارات على أطراف المولد هي :

$$\begin{aligned} v_a(t) &= V_p \sqrt{2} \cos \omega t & v_b(t) &= V_p \sqrt{2} \cos (\omega t - 90^\circ) \\ i_a(t) &= I_p \sqrt{2} \cos (\omega t - \theta) & i_b(t) &= I_p \sqrt{2} \cos (\omega t - 90^\circ - \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

فى مجال المتجهات ضع $I_p = V_p / |Z|$ ، $Z = |Z| \angle \theta$ وبالتالى :

$$\begin{aligned} V_{AN} &= V_p \angle 0 & V_{BN} &= V_p \angle -90^\circ & V_{AB} &= V_{AN} - V_{BN} = \sqrt{2} V_p \angle 45^\circ \\ I_A &= I_p \angle -\theta & I_B &= I_p \angle -90^\circ - \theta & I_N &= I_A + I_B = I_p \sqrt{2} \angle -45^\circ - \theta \end{aligned} \quad (3)$$

شكل المتجهات للجهد والتيار مبيته فى شكل 11-1(b) .

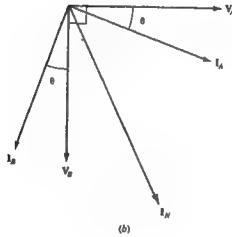
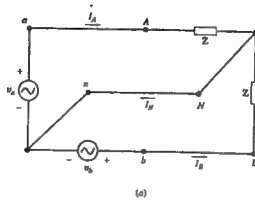
القدرات اللحظية $P_a(t)$ ، $P_b(t)$ التى يعطيها المتحان هما :

$$\begin{aligned} p_a(t) &= v_a(t)i_a(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos (2\omega t - \theta) \\ p_b(t) &= v_b(t)i_b(t) = V_p I_p \cos \theta - V_p I_p \cos (2\omega t - \theta) \end{aligned}$$

القدرة اللحظية الكلية $P_T(t)$ التى يعطيها المولد هي :

$$\begin{aligned} p_T(t) &= p_a(t) + p_b(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos (2\omega t - \theta) + V_p I_p \cos \theta - V_p I_p \cos (2\omega t - \theta) = 2V_p I_p \cos \theta \\ \text{Thus,} \quad P_T(t) &= P_{avg} = 2V_p I_p \cos \theta \end{aligned} \quad (4)$$

فى النظام المبين شكل 11-1(a) يمكن تغذية الحمل بمنبعين V_p ، $\sqrt{2}V_p$ ويكون تدفق الطاقة ثابت وبالإضافة إلى ذلك فإن الإزاحة الزاوية 90° بين الجهدين يمكن استخدامها للحصول على مجال مغناطيسى دوار نستخدمه خاصة فى بعض التطبيقات .

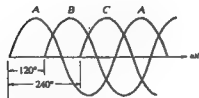


شكل 11-1

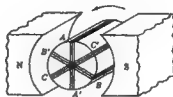
11-3 النظام ثلاثية الأوجه

مولدات الثلاث أوجه تحتوى على ثلاث منابع جهد جيبيبة لها نفس التردد ولكنها مزاحة عن بعضها بالزاوية 120° ويتحقق ذلك بوضع ثلاث ملفات مزاحة عن بعضها بزاوية كهربية 120° على نفس العضو الدائر ومن الطبيعي أن تكون القيم العظمى للثلاث أوجه متساوية وبذلك يكون المولد متزاناً وفى شكل 11-2 وضع الثلاث ملفات موزعة بالتساوى على محيط العضو الدائر أى أن ملفات مزاحة عن بعضها البعض بزاوية ميكانيكية 120° ولم يبين فى الشكل نهايات الملفات أو حلقات

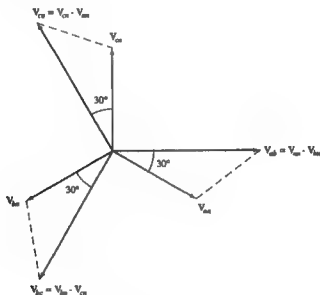
الإنزلاق ومع هذا فإنه من المعروف عند الدوران عكس عقارب الساعة يتبع لجوانب الملفات A ، B ، C المارة تحت أجزاء الأقطاب بالترتيب A-B-C-A-B-C..... . وتعاكس إشارة الجهد عند كل تغيير للقطب .



شكل 11-3



شكل 11-2



شكل 11-4

وباعتبار أن شكل القطب وشدة المجال المغناطيسي المناظرة تعمل على توليد جهود جيبية ، فإن الناتج عن الملفات الثلاثة سيكون كما في شكل 11-3 . الجهد B يكون متأخر 120 درجة كهربية عن A ويكون C متأخراً 240° . وهذا يؤدي إلى التماثل ABC وتفسير اتجاه الدوران ينشأ عنه A-C-B-A-C-B..... وفي هذه الحالة يسمى تعاقب CBA .

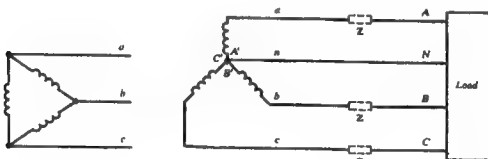
والجهود فى التعاقب ABC المتزن فى مجال الزمن والمتجهات مبينة فى المعادلة (5)، (6) على الترتيب. ومخطط المتجهات للجهود مبين شكل 11-4.

$$v_{an}(t) = (V_p \sqrt{2}) \cos \omega t \quad v_{bn}(t) = (V_p \sqrt{2}) \cos (\omega t - 120^\circ) \quad v_{cn}(t) = (V_p \sqrt{2}) \cos (\omega t - 240^\circ) \quad (5)$$

$$V_{an} = V_p \angle 0^\circ \quad V_{bn} = V_p \angle -120^\circ \quad V_{cn} = V_p \angle -240^\circ \quad (6)$$

11-4 نظم النجمة والدلتا

يمكن توصيل نهايات الملفات على شكل نجم (ويرمز لها أيضاً بالرمز Y انظر بند 11-8) وذلك بتوصيل الأطراف A' ، B' ، C' معاً ويعبر عنها بطرف التعادل N وذلك بأخذ الأطراف A ، B ، C لتصبح الثلاث خطوط A ، B ، C لنظام الثلاث أوجه.



شكل 11-5

شكل 11-5

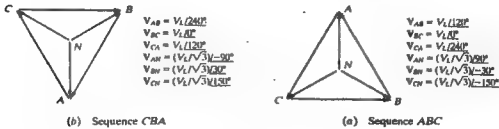
وإذا استخدمت توصيلة التعادل مع الخطوط الثلاثة فيسمى النظام ثلاث أوجه ذو أربعة أسلاك وفى شكل 11-5 تم التعبير عن الخطوط بالحروف الصغيرة a ، b ، c عند أطراف المنبع الذى يمكن أن يكون محولاً أو مولد ثلاث أوجهه وتم التعبير بالحروف الكبيرة A ، B ، C عند الحمل وإذا اعتبرت معاوقة الخط فإن اتجاه التيار سيكون مشابهاً فى الخط aA ويرمز له بالرمز I_{aA} ومتجه الجهد المفقود للخط V_{aA} .

ويمكن توصيل نهايات ملفات المولد كما في شكل 11-6 والتي تسمى توصيل دلتا (توصيلة Δ) للثلاث أوجه ذو الخطوط a ، b ، c وتوصيلة دلتا لمجموعة الملفات ليس لها نقطة تعادل حتى يكون النظام ذو أربعة أسلاك فيما عدا عند استخدام محول Y- Δ .

11-5 متجهات الجهود

إذا تم اختيار زاوية وجه لأحد الجهود في نظام الثلاثة أوجه فإن ذلك سيحدد زوايا الوجه للجهود الأخرى . وهذا هو المتفق عليه لتثبيت نقطة على المحور الأفقى لتبين القيمة عند $t = 0$ كما في شكل 11-3 وهذا بالطبع اتفاق اختياري . وفي هذا الفصل ستأخذ الزاوية صفر لتكون مرتبطة مع متجه الجهد للخط B بالنسبة للخط C $V_{BC} = V_L \angle 0^\circ$.

ومبين في مسألة 11-4 أن جهد الخط V_L يساوى $\sqrt{3}$ مضروباً في الجهد بين الخط وخط التعادل . وجميع الجهود المتعاقبة ABC مبينة في شكل (a) 11-7 والجهود CBA مبينة في شكل (b) 11-7 . هذه المتجهات للجهود بالرجوع إلى الفصول السابقة تعنى القيم العظمى . وفي نظام الثلاث أوجه ذو أربعة أسلاك ، يستخدم نظام 480-V بصفة عامة للأحمال الصناعية ونظام 208-V شائع الاستخدام في المنشآت التجارية ، كقيم فعالة ومحددة . وفي هذا الفصل فإن جهد الخط في النظام السابق سيكون $V_{BC} = 678.8 \angle 0^\circ$ V والتي تجعل القيمة مؤثرة $V_{BC\text{eff}} = 678.8 / \sqrt{2}$ و 480 V والناس الذين يتعاملون بصفة دائمة في هذا المجال يستخدمون المتجهات ذات القيم الفعالة ويكتبون $V_{BC} = 480 \angle 0^\circ$ V .



شكل 11-7

11-6 حمل دلتا المتزن

إذا تم توصيل ثلاث معاوقات متطابقة كما في شكل 11-8 فإنها ستصنع حمل دلتا متزن ويعبر عن التيارات في المعاوقات بتيارات الأوجه أو تيارات الحمل ويكون الثلاثة متساوية في القيمة ومختلفة عن بعضها بزاوية إزاحة 120° . وستكون تيارات الخطوط أيضاً متساوية في القيمة ولها زاوية إزاحة عن بعضها 120° وبالاصطلاح العام فإنها تأخذ الاتجاه من المنبع إلى الحمل.

مثال 11-2 نظام ثلاثي ABC ذو ثلاث أسلاك والقيمة الفعالة للجهد 120 V به ثلاث معاوقات كل منها $5.0 \angle 45^\circ \Omega$ متصلة بطريقة دلتا. أوجد تيارات الخطوط وارسم شكل المتجهات للجهد والتيار.

القيمة العظمى لجهد الخط $120\sqrt{2} = 169.7\text{ V}$ وبالرجوع لشكل 11-7(a) فإن الجهود تكون:

$$V_{AB} = 169.7 \angle 120^\circ \text{ V} \quad V_{BC} = 169.7 \angle 0^\circ \text{ V} \quad V_{CA} = 169.7 \angle 240^\circ \text{ V}$$

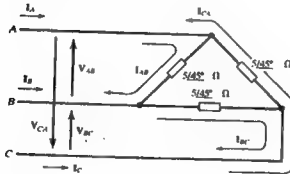
والترميز مزدوج الحروف يبين اتجاهات تيار الوجه فمثلاً I_{AB} تعني تياراً غير في معاوقة من الخط A

إلى الخط B، وجميع اتجاهات التيار مبينة في شكل 11-8 وبذلك فإن تيارات الوجه هي:

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{169.7 \angle 120^\circ}{5 \angle 45^\circ} = 33.9 \angle 75^\circ \text{ A}$$

$$I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z} = \frac{169.7 \angle 0^\circ}{5 \angle 45^\circ} = 33.9 \angle -45^\circ \text{ A}$$

$$I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z} = \frac{169.7 \angle 240^\circ}{5 \angle 45^\circ} = 33.9 \angle 195^\circ \text{ A}$$



شكل 11-8

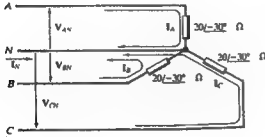
باستخدام KCL فإن تيار الخط I_A يعطى بالعلاقة :

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 33.9 / 75^\circ - 33.9 / 195^\circ = 58.7 / 45^\circ \text{ A}$$

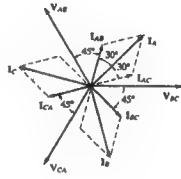
$$I_B = 58.7 / -75^\circ \text{ A and } I_C = 58.7 / 165^\circ \text{ A.}$$

وبالمثل

وجهد الخط وجميع التيارات مبينة فى شكل المتجهات 11-9 . لاحظ بالأخص أن التيارات متزنة ولذلك فإنه عند حساب أحد تيارات الأوجه فإن جميع التيارات الأخرى يمكن الحصول عليها من خلال شكل المتجهات المتزنة . ولاحظ أيضاً $58.7 \times \sqrt{3} = 33.9$ أى أن $I_L = \sqrt{3} I_{ph}$ وذلك بالنسبة لحمل دلتا المتزن .



شكل 11-10



شكل 11-9

11-7 حمل نجمة المتزن ذو أربعة أسلاك

إذا تم توصيل ثلاث معاوقات متطابقة كما فى شكل 11-10 فإن ذلك يصنع ما يسمى بتوصيلة حمل نجمة المتزن . وتكون التيارات فى المعاوقات هى أيضاً تيارات الخط وتكون اتجاهاتها من المنبع إلى الحمل كما سبق .

مفصال 11-3 نظام ثلاث أوجه CBA ذو أربعة أسلاك ، القيمة الفعالة لجهد الخط 120 V يحتوى على ثلاث معاوقات كل منها $20\angle -30^\circ \Omega$ متصلة على شكل نجمة (شكل 11-10) أوجد تيارات الخط وارسم شكل المتجهات للجهد والتيار .

القيمة العظمى لجهد الخط $V = 169.7$ وجهد كل خط بالنسبة لنقطة التعادل هي: $= 169.7 / \sqrt{3}$
 98.0 V ومن شكل 11-7(b).

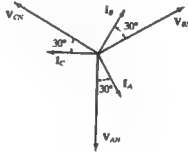
$$V_{AN} = 98.0 / -90^\circ \text{ V} \quad V_{BN} = 98.0 / 30^\circ \text{ V} \quad V_{CN} = 98.0 / 150^\circ \text{ V}$$

Then $I_A = \frac{V_{AN}}{Z} = \frac{98.01 / -90^\circ}{20 / -30^\circ} = 4.90 / -60^\circ \text{ A}$

وبالمثل $I_C = 4.90 \angle 180^\circ \text{ A}$ ، $I_B = 4.90 \angle 60^\circ \text{ A}$

ومخطط متجهات الجهد والتيار مبينة في شكل 11-11 . لاحظ أنه عند حساب أحد تيارات الخط فإن التيارين الباقيين يمكن استنتاجهما من التماثل في شكل المتجهات . وجميع هذه التيارات تعود عن طريق خط التعادل وبذلك يكون تيار خط التعادل هو سالب جمع تيارات الخطوط .

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) = 0$$



شكل 11-11

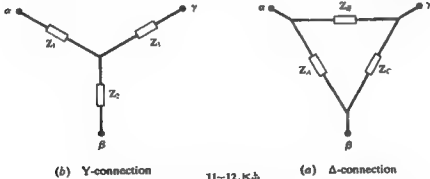
حيث أن تيار خط التعادل بالنسبة للحمل الثلاثي نجمية المترن يكون دائماً صغيراً فإنه يمكن حساباً الاستغناء عنه بدون أي تغيير في النتائج . وفي دوائر القدرة العملية فإنه لا بد من استعماله حيث أنه يحمل تيار عدم الاتزان لتيارات الخطوط (صغير القيمة) كما أنه يحمل تيار القصر أو تيارات الأخطاء لتشغيل نباتات الوقاية كما أنه يمنع الارتفاعات في الجهد على أوجه الحمل وحيث أن الحسابات في مثال 11-3 تمت بسهولة فإن تيار التعادل سيؤخذ في الاعتبار عند حساب تيار الخط في الأحمال المترنة حتى ولو كانت ذو ثلاث أسلاك فقط .

11-8 التوصيلات المكافئة للنجمة والدلتا

شكل 11-12 يبين ثلاث معاوقات متصلة على شكل دلتا Δ وتم توصيل ثلاث معاوقات أخرى على شكل نجمة Y وإذا تم تعريف أطراف التوصيلتين بالرموز α ، β ، γ . ومن ثم تكون Z_1 المعاوقة المتصلة بالطرف α في توصيلة Y و Z_C المعاوقة المقابلة للطرف α في توصيلة Δ وهكذا. وبالنظر لأي طرفين، فإن التوصيلتين سيكونان متكافئين إذا تساوى كل من الدخل والخرج والمعاوقات المنقولة. وبذلك يكون شرط التكافؤ كما هو مبين بالعلاقات التالية:

Y-to- Δ Transformation	Δ -to-Y Transformation
$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3}$	$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$
$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2}$	$Z_2 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$
$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1}$	$Z_3 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$

ويجب أن نلاحظ أنه إذا تساوت المعاوقات الثلاثة لإحدى التوصيلتين فإن المعاوقات في التوصيلة المكافئة تحقق النسبة $Z_A / Z_Y = 3$.



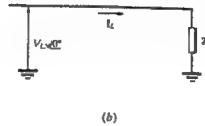
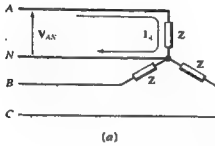
شكل 11-12

11-9 تمثيل أحمال ثلاثية الأوجه المتزنة بدائرة مكافئة وجه واحد

شكل 11-13(a) يبين حمل نجمة متزن. وفي كثير من الحالات كما في حسابات القدرة مثلاً فإنه يكون كافياً حساب قيمة I_L للخطوط الثلاثة ويمكن الحصول عليه من الدائرة المكافئة ذات الوجه الواحد شكل 11-13(b) والتي تمثل أحد الأوجه للنظام الأصلي باعتبار أحد الجهود المختارة وهو جهد

الوجه ذو زاوية وجه تساوى صفراً. وذلك يجعل $I_L = I_L / \theta$ حيث θ هي زاوية المعاوقة. وإذا كان المطلوب هو التيارات الحقيقية I_A ، I_B ، I_C فإن زوايا الوجه لكل منها يمكن الحصول عليه بإضافة الزاوية θ - لزوايا الوجه لكل من V_{CN} ، V_{BN} ، V_{AN} كما هو مبين شكل 11-7. لاحظ أن الزاوية على I_L تعطى معامل قدرة لكل وجه $\cos \theta = \text{pf}$.

يمكن تطبيق نفس الطريقة لحمل دلتا المتوازن إذا تم استبدال الحمل بتوصيل نجمة المكافئة حيث $Z_Y = (1/3) Z_\Delta$ (بند 11-8).



شكل 11-13

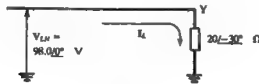
مثال 11-4 أعد حل مثال 11-3 بطريقة دائرة الوجه الواحد المكافئة.

بالرجوع إلى شكل 11-4 (والذي فيه الرمز Y تدل على نوع توصيلة للحمل الأصلي).

$$I_L = \frac{V_{LN}}{Z} = \frac{98.0/0^\circ}{20/-30^\circ} = 4.90/30^\circ \text{ A}$$

من شكل 11-7(b) فإن زوايا الوجه لكل من V_{CN} ، V_{BN} ، V_{AN} هي -90° ، 30° ، 150° لذلك:

$$I_A = 4.90/-60^\circ \text{ A} \quad I_B = 4.90/60^\circ \text{ A} \quad I_C = 4.90/180^\circ \text{ A}$$



شكل 11-13

11-10 حمل دلتا الغير متزن

فى حالة أحمال دلتا الغير متزنة يتم حساب تيارات الأوجه ثم يستخدم KCL للحصول على تيارات الخط . وتكون التيارات غير متساوية ولن يكون لها التماثل كما فى الحالة المتزنة .

مسألة 11-5 : نظام ثلاث أوجه ذو الجهد $V = 339.4$ والتعاقب ABC [شكل (11-15(b)) متصل بحمل موصل دلتا مع :

$$Z_{AB} = 10 \angle 0^\circ \Omega \quad Z_{BC} = 10 \angle 30^\circ \Omega \quad Z_{CA} = 15 \angle -30^\circ \Omega$$

أوجد تيارات الوجه والخط وارسم مخطط المتجهات .

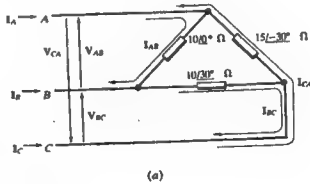
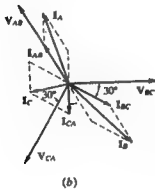
$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{339.4 \angle 120^\circ}{10 \angle 0^\circ} = 33.94 \angle 120^\circ \text{ A}$$

Similarly, $I_{BC} = 33.94 \angle -30^\circ \text{ A}$ and $I_{CA} = 22.63 \angle 270^\circ \text{ A}$. Then,

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 33.94 \angle 120^\circ - 22.63 \angle 270^\circ = 54.72 \angle 108.1^\circ \text{ A}$$

Also, $I_B = 65.56 \angle -45^\circ \text{ A}$ and $I_C = 29.93 \angle -169.1^\circ \text{ A}$.

مخطط المتجهات مبين فى شكل 11-15(b) مع ملاحظة أن القيم والزوايا مرسومة بمقياس رسم .



شكل 11-15

11-11 حمل نجمة الغير متزن

نظام أربعة أسلاك :

ير بموصل التعادل تيار عدم اتزان لتوصيلة النجمة ويحافظ على جهد الوجه لكل وجه للحمل .
وحيث أن تيارات الخط غير متساوية فإن تيارات الوجه في مخطط المتجهات غير متزن .

مثال 11-6 نظام ثلاثي CBA متصل على شكل نجمة 150 V أربعة أسلاك له .

$$Z_A = 6/0^\circ \Omega \quad Z_B = 6/30^\circ \Omega \quad Z_C = 5/45^\circ \Omega$$

أوجد جميع تيارات الخط وارسم مخطط المتجهات . انظر شكل (a) 11-16 .

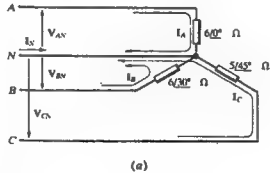
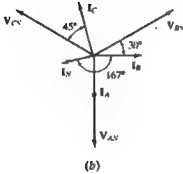
$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z_A} = \frac{86.6/-90^\circ}{6/0^\circ} = 14.43/-90^\circ \text{ A}$$

$$I_B = \frac{V_{BN}}{Z_B} = \frac{86.6/30^\circ}{6/30^\circ} = 14.43/0^\circ \text{ A}$$

$$I_C = \frac{V_{CN}}{Z_C} = \frac{86.6/150^\circ}{5/45^\circ} = 17.32/105^\circ \text{ A}$$

$$I_N = -(14.43/-90^\circ + 14.43/0^\circ + 17.32/105^\circ) = 10.21/-167.0^\circ \text{ A}$$

شكل (b) 11-16 يبين مخطط المتجهات .



شكل 11-16

نظام ثلاث أسلاك :

بدون وجود موصل التعادل فإن المعاوقات المتصلة على شكل نجمة ستغير قيم جهد الوجه لها
تغيراً ملحوظاً .

مثال 11-7 : شكل (a) 11-17 يبين نفس النظام الذي تعاملنا معه في مثال 6-11 فيما عدا أن خط التبادل ليس موجوداً. أوجد تيارات الخط وأوجد إزاحة جهد نقطة التبادل V_{ON} .

ترسم الدائرة مرة أخرى كما في شكل (b) 11-17 وذلك لاقتراح معادلة جهد أحد العقد باعتبار أن الجهد V_{OB} قيمة غير معروفة.

$$\frac{V_{OB} - V_{AB}}{Z_A} + \frac{V_{OB}}{Z_B} + \frac{V_{OB} + V_{BC}}{Z_C} = 0$$

$$V_{OB} \left(\frac{1}{6/0^\circ} + \frac{1}{6/30^\circ} + \frac{1}{5/45^\circ} \right) = \frac{150/240^\circ}{6/0^\circ} - \frac{150/0^\circ}{5/45^\circ}$$

from which $V_{OB} = 66.76/-152.85^\circ$ V. Then,

$$I_A = -\frac{V_{OB}}{Z_A} = 11.13/-2.85^\circ \text{ A}$$

From $V_{OA} + V_{AB} = V_{OB}$, $V_{OA} = 100.7/81.08^\circ$ V, and

$$I_A = -\frac{V_{OA}}{Z_A} = 16.78/-98.92^\circ \text{ A}$$

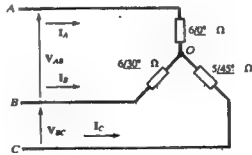
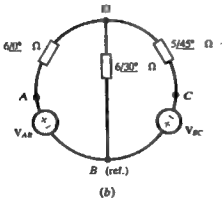
$$V_{OC} = V_{OB} - V_{CB} = 95.58/-18.58^\circ \text{ V, and}$$

$$I_C = 19.12/116.4^\circ \text{ A}$$

وبالمثل

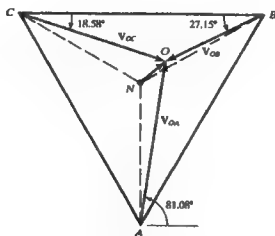
نقطة O رحلت من نقطة تعادل N بمتجه الجهد V_{ON} والمعطاه بالعلاقة :

$$V_{ON} = V_{OA} + V_{AN} = 100.7/81.08^\circ + \frac{150}{\sqrt{3}}/-90^\circ = 20.24/39.53^\circ \text{ V}$$



شكل 11-17

وشكل 11-18 يوضح مخطط الاتجاهات ومنه يتضح إزاحة نقطة O من مركز المثلث المتساوي الأضلاع انظر المسألة 11-13 للحصول على طريقة أخرى.



شكل 11-18

11-12 القدرة في النظم ثلاثية الأوجه

القدرة التي يعطيها مولد ذو ثلاث أوجه متزن إلى ثلاث معاوقات متطابقة ذات زاوية وجه θ

هى:

$$p_a(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos (2\omega t - \theta)$$

$$p_b(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos (2\omega t - 240^\circ - \theta)$$

$$p_c(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos (2\omega t - 480^\circ - \theta)$$

$$p_T(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t)$$

$$= 3V_p I_p \cos \theta + V_p I_p [\cos (2\omega t - \theta) + \cos (2\omega t - 240^\circ - \theta) + \cos (2\omega t - 480^\circ - \theta)]$$

But $\cos (2\omega t - \theta) + \cos (2\omega t - 240^\circ - \theta) + \cos (2\omega t - 480^\circ - \theta) = 0$ for all t . Therefore,

$$p_T(t) = 3V_p I_p \cos \theta = P$$

القدرة الكلية اللحظية تساوى القدرة الكلية المتوسطة ويمكن كتابتها بدلالة جهد الخط V_L و تيار

الخط I_L وبذلك:

. فى نظام دلتا $V_L = V_P$ ، $I_L = \sqrt{3}I_P$ وبذلك $P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$

وفى نظام نجمة $V_L = \sqrt{3}V_P$ ، $I_L = I_P$ وبذلك $P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$

والعلاقة $\sqrt{3}VI \cos \theta$ تعطى القدرة فى نظام الثلاث أوجه المتزنة بغض النظر عن طريقة توصيل الثلاث أوجه معاً. وتكون معامل القدرة فى نظام الثلاث أوجه هو جيب تمام الزاوية θ ($\cos \theta$) وجهد الحظ V_L فى النظم الصناعية دائماً معروف. وإذا كان الحمل متزاناً فإنه يمكن حساب القدرة الكلية من تيار الحظ ومعامل القدرة.

وباختصار فإننا لِنَقْدِرُ القدرة الغير فعالة والقدرة الظاهرية ومعامل القدرة فى نظام الثلاثة أوجه

$$P = \sqrt{3}V_L I_L \cos \theta \quad Q = \sqrt{3}V_L I_L \sin \theta \quad S = \sqrt{3}V_L I_L \quad pf = \frac{P}{S}$$

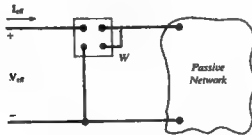
وبالطبع فإن جميع قيم الجهود والتيار هى القيم الفعالة.

11-13 قياس القدرة وطريقة استخدام جهازى واطميتر

يجتوى جهاز قياس القدرة (الواطميتر) على ملف للجهود وملف للتيار ويتأثر بحاصل ضرب الجهود الفعال والتيار الفعال وجيب تمام الزاوية بينهما وبالتالي فإن جهاز قياس القدرة فى شكل 11-19 يبين القدرة المتوسط المعطاه إلى الشبكة الفعالة.

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos \theta = \text{Re} (V_{eff} I_{eff}^*)$$

انظر بند 10-7.



شكل 11-19

بتوصيل جهازي لقياس القدرة في أى خطين من الثلاث أوجه ذو الثلاث أسلاك سيعطيان القيمة الصحيحة للقدرة الكلية في الثلاث أوجه وذلك بجمع قراءتهما . ويقرأ الجهاز في الاتجاه المضاد إذا كانت زاوية الوجه بين الجهد والتيار تزيد عن 90° في هذه الحالة يمكن عكس أطراف توصيلة التيار وتكون القراءة في هذه الحالة بقيمة سالبة عند الجمع وفي شكل 11-20 وضع الجهازي في الخطين C ، A مع توصيل ملفي الجهد إلى الخط B وبذلك تكون قراءتهما .

$$W_A = \text{Re} (V_{ABeff} I_{Aeff}^*) = \text{Re} (V_{ABeff} I_{ABeff}^*) + \text{Re} (V_{ABeff} I_{Ceff}^*)$$

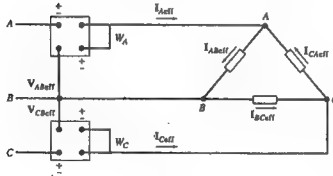
$$W_C = \text{Re} (V_{CBeff} I_{Ceff}^*) = \text{Re} (V_{CBeff} I_{Ceff}^*) + \text{Re} (V_{CBeff} I_{Aeff}^*)$$

وعند تطبيق قانون KCL فإن $I_A = I_{AB} + I_{BC}$ ، $I_C = I_{CA} + I_{CB}$ ، قد استخدما لاستبدال تيارات الخط بتيارات الوجه . ويعرف الحد الأول من W_A بالرمز P_{AB} وهي القدرة المتوسطة في الوجه AB لحمل دلتا وبالمثل فإن الحد التالي في W_C هو P_{CB} . وبجمع المعادلتين وإعادة إضافة الحدين الأوسطين نحصل على :

$$W_A + W_C = P_{AB} + \text{Re} [(V_{ABeff} - V_{CBeff}) I_{ACeff}^*] + P_{CB} = P_{AB} + P_{AC} + P_{CB}$$

وبتطبيق KVL فإن $V_{AB} - V_{CB} = V_{AC}$ وتطبيق

وبنفس الطريقة يمكن استنتاج التشابه للحصول على توصيلة دلتا .



شكل 11-20

الأحمال المترنة

حينما يتم توصيل ثلاث أحمال مترنة Z/θ بطريقة دلتا فإن تيارات الوجه تصنع الزاوية 30° مع تيارات الخط الناتجة . ويؤول شكل 11-21 لشكل (11-20) وذلك مع افتراض النتائج ABC . ومن

الملاحظ أن V_{AB} يتقدم I_A بالزاوية $30^\circ + \theta$ بينما يتقدم V_{CB} التيار I_C بالزاوية $30^\circ - \theta$ وبالتالي فإن كلا الواطمتران سيقرا:

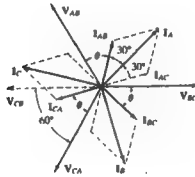
$$W_A = V_{Aeff} I_{Aeff} \cos(\theta + 30^\circ) \quad W_C = V_{Ceff} I_{Ceff} \cos(\theta - 30^\circ)$$

وعموماً فإنه لا يعرف تتابع الجهود بالنسبة لبعضها في الخططين المتصل بهما الواطمتران فإن:

$$W_1 = V_{Leff} I_{Leff} \cos(\theta + 30^\circ)$$

$$W_2 = V_{Leff} I_{Leff} \cos(\theta - 30^\circ)$$

وهذه العلاقات مساوية أيضاً بالنسبة لتوصيلة النجمة المتزنة.



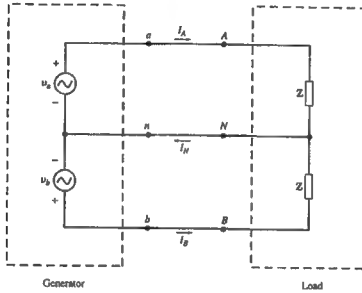
ويحذف V_{Leff} ، I_{Leff} من كلا القراءتين نحصل على:

$$\tan \theta = \sqrt{3} \left(\frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} \right)$$

ولذلك فإنه يمكن الحصول مباشرة على قيمة زاوية المعاوقة θ من قراءتى الواطمتران . ولا يكون هناك أهمية لإشارة الزاوية θ نظراً لأن كلا الواطمتران 1 ، 2 اختياراً بالنسبة لقراءتى الواطمترين وعموماً فإنه عملياً فإن الحمل يكون متزاناً وحشياً وعلى ذلك فإن $(\theta > 0)$.

مسائل محلولة

11.1 مولد متزن ذو وجهين شكل 11-22 يغذى حملين متطابقين فإذا كانت زاوية الوجه بين جهدي المنبع 180° بينهما. أوجد (أ) تيارات الخطوط والجهود وزوايا الوجه لها، (ب) القدرات اللحظية والمتوسطة التي يعطيها المولد.



شكل 11-22

$$I_P = V_P / |Z|, \quad Z = |Z| \angle \theta$$

(أ) الجهود و تيارات الخط في مجال المتجهات هي:

$$V_{aN} = V_P \angle 0 \quad V_{bN} = V_P \angle -180^\circ = -V_P \angle 0 \quad V_{AB} = V_{aN} - V_{bN} = 2V_P \angle 0$$

والآن من قيم Z ، I_P المعطاه سابقاً نحصل على:

$$I_A = I_P \angle -\theta \quad I_B = I_P \angle -180^\circ - \theta = -I_P \angle -\theta \quad I_N = I_A + I_B = 0$$

(ب) القدرات اللحظية المعطاه هي:

$$p_a(t) = v_a(t)i_a(t) = V_P I_P \cos \theta + V_P I_P \cos(2\omega t - \theta)$$

$$p_b(t) = v_b(t)i_b(t) = V_P I_P \cos \theta + V_P I_P \cos(2\omega t - \theta)$$

والقدرة اللحظية الكلية $P_T(t)$ هي :

$$p_T(t) = p_a(t) + p_b(t) = 2V_p I_p \cos \theta + 2V_p I_p \cos (2\omega t - \theta)$$

$$P_{avg} = 2 V_p I_p \cos \theta$$

11.2 أعد حل المسألة 11-1 إذا كان $Z = 4 + j 3 \Omega$ ، $V_p = 110 \text{ V}_{rms}$

(أ) في الصورة الاتجاهية $Z = 5 \angle 36.9^\circ \Omega$ ومن ثم .

$$V_{AN} = 110 \angle 0^\circ \text{ V} \quad V_{BN} = 110 \angle -180^\circ \text{ V} \quad V_{AB} = V_{AN} - V_{BN} = 110 \angle 0^\circ - 110 \angle -180^\circ = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\text{and} \quad I_A = V_{AN}/Z = 22 \angle -36.9^\circ \text{ A} \quad I_B = V_{BN}/Z = 22 \angle -216.9^\circ = -22 \angle -36.9^\circ \text{ A}$$

$$I_N = I_A + I_B = 0$$

$$p_a(t) = 110(22)[\cos 36.9^\circ + \cos (2\omega t - 36.9^\circ)] = 1936 + 2420 \cos (2\omega t - 36.9^\circ) \text{ (W)} \quad (\text{ب})$$

$$p_b(t) = 110(22)[\cos 36.9^\circ + \cos (2\omega t - 36.9^\circ - 360^\circ)] = 1936 + 2420 \cos (2\omega t - 36.9^\circ) \text{ (W)}$$

$$p(t) = p_a(t) + p_b(t) = 3872 + 4840 \cos (2\omega t - 36.9^\circ) \text{ (W)}$$

$$P_{avg} = 3872 \text{ W}$$

11.3 أعد حل المسألة 11-2 ولكن باعتبار جهدي المتبع في المسألة 11-1 بينهما زاوية وجه 90° .

(أ) مرة أخرى $Z = 5 \angle 36.9^\circ$ ومن ثم .

$$V_{AN} = 110 \angle 0^\circ \text{ V} \quad V_{BN} = 110 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$V_{AB} = V_{AN} - V_{BN} = 110 \angle 0^\circ - 110 \angle -90^\circ = 110(\sqrt{2} \angle -45^\circ) = 155.6 \angle -45^\circ \text{ V}$$

$$\text{and} \quad I_A = V_{AN}/Z = 22 \angle -36.9^\circ \text{ A} \quad I_B = V_{BN}/Z = 22 \angle -126.9^\circ \text{ A}$$

$$I_N = I_A + I_B = 22 \angle -36.9^\circ + 22 \angle -126.9^\circ = 22(\sqrt{2} \angle -81.9^\circ) = 31.1 \angle -81.9^\circ \text{ A}$$

$$p_a(t) = 110(22)[\cos 36.9^\circ + \cos (2\omega t - 36.9^\circ)] = 1936 + 2420 \cos (2\omega t - 36.9^\circ) \text{ (W)} \quad (\text{ب})$$

$$p_b(t) = 110(22)[\cos 36.9^\circ + \cos (2\omega t - 36.9^\circ - 180^\circ)] = 1936 - 2420 \cos (2\omega t - 36.9^\circ) \text{ (W)}$$

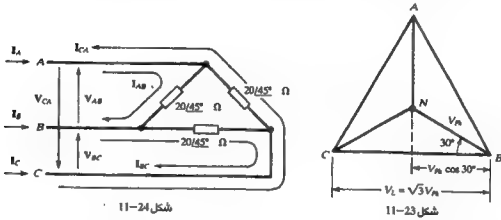
$$p(t) = P_a + P_b = 2(1936) = 3872 \text{ W}$$

$$P_{avg} = p(t) = 3872 \text{ W}$$

11.4 بين أن جهد الخط V_L في نظام الثلاث أوجه هو $\sqrt{3}$ من جهد الوجه V_{ph} .

انظر مخطط المتجهات (للتعاقب ABC) شكل 11-23.

11.5 نظام ثلاثي ABC ذو جهد فعال 70.7 V يحتوى على حمل ثلاثي متزن على شكل دلتا بالمعاوقات $20 \angle 45^\circ \Omega$. أوجد تيارات الخط وارسم مخطط المتجهات للجهد والتيار.



شكل 11-24

شكل 11-23

الدائرة المبينة شكل 11-24 وجهود الوجه لها القيم $V_{max} = \sqrt{2} V_{eff} = 100$ V ويمكن الحصول على زوايا الوجه من شكل 11-7(a) وبذلك:

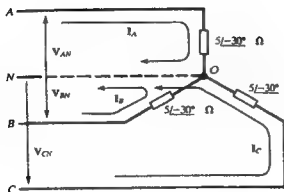
$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{100 \angle 120^\circ}{20 \angle 45^\circ} = 5.0 \angle 75^\circ \text{ A}$$

وبالمثل $I_{BC} = 5.0 \angle -45^\circ \text{ A}$ و $I_{CA} = 5.0 \angle -45^\circ \text{ A}$. وتكون تيارات الخط.

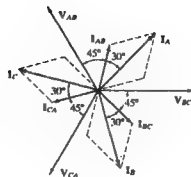
$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 5 \angle 75^\circ - 5 \angle 195^\circ = 8.65 \angle 45^\circ \text{ A}$$

وبالمثل $I_B = 8.65 \angle -75^\circ \text{ A}$ و $I_C = 8.65 \angle 165^\circ \text{ A}$

ومخطط المتجهات للجهد والتيار مبين في شكل 11-25.



شكل 11-26



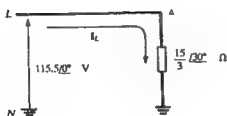
شكل 11-25

11.6 نظام ثلاثي متزن CBA الجهد الفعال للخط هو 106.1 V متصل به حمل ثلاثي متزن على شكل نجمة بالمعاوقات $5 \angle -30^\circ \Omega$ (شكل 11-26) . أوجد التيارات وارسم مخطط المتجهات للجهد والتيار.

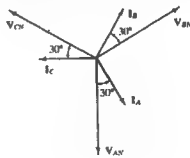
مع حمل النجمة المتزنة يكون تيار التعادل صفراً ومع هذا فإنه من الأفضل عمل توصيلة التعادل ليسهل حساب تيارات الخط . ويكون تيار الخط $V_L = \sqrt{2} (106.1) = 150 \text{ V}$ وتكون القيمة من الخط لخط التعادل هي $V_{LN} = 150/\sqrt{3} = 86.6 \text{ V}$

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z} = \frac{86.6 \angle -90^\circ}{5 \angle -30^\circ} = 17.32 \angle -60^\circ \text{ A}$$

وبالمثل $I_C = 17.32 \angle 180^\circ \text{ A}$ ، $I_B = 17.32 \angle 60^\circ \text{ A}$ شكل المتجهات شكل 11-27 والذي فيه يتقدم تيارات الخط المتزنة جهود الزاوية 30° (القيمة السالبة) وهي زاوية المعاوقات .



شكل 11-28



شكل 11-27

11.7 نظام ثلاثي CBA ذو ثلاثة أسلاك جهده الفعال 106.1 V به حمل ثلاثي متزن على شكل دلتا بالمعاوقات $Z = 15 \angle 30^\circ \Omega$. أوجد تيارات الخط والوجه بطريقة الدائرة المكافئة ذات الوجه الواحد.

بالرجوع لشكل 11-28 $V_{LN} = (141.4 \sqrt{2}) 1\sqrt{3} = 115.5V$ وبذلك

$$I_L = \frac{115.5/0^\circ}{(15/3)/30^\circ} = 23.1/-30^\circ \text{ A}$$

تتأخر تيارات الخط جهود الوجه في التعاقب ABC بالزاوية 30° .

$$I_A = 23.1/60^\circ \text{ A} \quad I_B = 23.1/-60^\circ \text{ A} \quad I_C = 23.1/180^\circ \text{ A}$$

ويتأخر تيارات الوجه $I_{ph} = I_L / \sqrt{3} = 13.3 \text{ A}$ جهود الخط المناظرة لها بزاوية 30° .

$$I_{AB} = 13.3/90^\circ \text{ A} \quad I_{BC} = 13.3/-30^\circ \text{ A} \quad I_{CA} = 13.3/210^\circ \text{ A}$$

ورسم شكل المتجهات يحقق الزاوية السابقة.

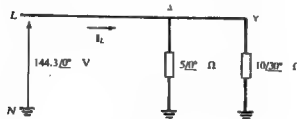
11.8 نظام ثلاثي ذو ثلاثة أسلاك وجهه فعال 178.8 V يغذي حملين متزين أحدهما على شكل دلتا بالمعاوقات $Z_\Delta = 15 \angle 0^\circ \Omega$ والآخر على شكل نجمة بالمعاوقات $Z_Y = 10 \angle 30^\circ \Omega$. أوجد القدرة الكلية.

حول أولاً حمل دلتا ليكون نجمة ثم استخدم الدائرة المكافئة للوجه الواحد كما في شكل 11-29 للحصول على تيارات الخط.

$$I_L = \frac{144.3/0^\circ}{5/0^\circ} + \frac{144.3/0^\circ}{10/30^\circ} = 42.0/-9.9^\circ \text{ A}$$

Then

$$P = \sqrt{3} V_{L\text{eff}} I_{L\text{eff}} \cos \theta = \sqrt{3} (176.8)(29.7) \cos 9.9^\circ = 8959 \text{ W}$$



شكل 11-29

11.9 أوجد القراءة باستخدام طريقة الواطنيتين فى الدائرة المبينة فى المسألة 11-8 .

زاوية التيار I_L هى -9.9° وهى سالبة زاوية المعاوقة المكافئة لتوصيلة التوازي $5 \angle 0^\circ \Omega$ ،
 $10 \angle 30^\circ \Omega$ حيث $\theta = 9.9^\circ$ من علاقات بند 11-13 .

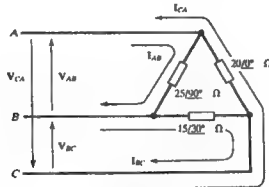
$$W_1 = V_{Leff} I_{Leff} \cos(\theta + 30^\circ) = (176.8)(29.7) \cos 39.9^\circ = 4028 \text{ W}$$

$$W_2 = V_{Leff} I_{Leff} \cos(\theta - 30^\circ) = (176.8)(29.7) \cos(-20.1^\circ) = 4931 \text{ W}$$

وللتأكد من صحة النتائج $W_1 + W_2 = 8959 \text{ W}$ وهو ما يتفق مع ما حصلنا عليه فى مسألة

11-8 .

11.10 منبع ثلاثى الوجه ، جهد الخط الفعال 240 V به حمل ثلاثى دلتا غير متزن مبين شكل 11-30 .
 أوجد تيارات الخط والقدرة الكلية .



شكل 11-30

يمكن إجراء حسابات القدرة بدون معرفة تعاقب النظام والقيم الفعالة لتيارات الوجه هى :

$$I_{ABeff} = \frac{240}{25} = 9.6 \text{ A} \quad I_{BCeff} = \frac{240}{15} = 16 \text{ A} \quad I_{CAeff} = \frac{240}{20} = 12 \text{ A}$$

وبذلك تكون القدرة المركبة فى الأوجه الثلاثة هى :

$$S_{AB} = (9.6)^2 (25 \angle 90^\circ) = 2304 \angle 90^\circ = 0 + j2304$$

$$S_{BC} = (16)^2 (15 \angle 30^\circ) = 3840 \angle 30^\circ = 3325 + j1920$$

$$S_{CA} = (12)^2 (20 \angle 0^\circ) = 2880 \angle 0^\circ = 2880 + j0$$

والقدرة الكلية المركبة هي مجموعها:

$$S_T = 6205 + j4224$$

أي أن $Q_T = 4224 \text{ var}$ ، $P_T = 6205 \text{ W}$ (حتى).

وللحصول على التيار فلا بد من فرض التعاقب وليكن ABC وبالتالي باستخدام شكل 11-7(a)

فإن:

$$I_{AB} = \frac{339.4/120^\circ}{25/90^\circ} = 13.6/30^\circ \text{ A}$$

$$I_{BC} = \frac{339.4/0^\circ}{15/30^\circ} = 22.6/-30^\circ \text{ A}$$

$$I_{CA} = \frac{339.4/240^\circ}{20/0^\circ} = 17.0/240^\circ \text{ A}$$

وللحصول على تيار الخط بتطبيق KCL عند نقط التوصيل .

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 13.6/30^\circ - 17.0/240^\circ = 29.6/46.7^\circ \text{ A}$$

$$I_B = I_{BC} + I_{BA} = 22.6/-30^\circ - 13.6/30^\circ = 19.7/-66.7^\circ \text{ A}$$

$$I_C = I_{CA} + I_{CB} = 17.0/240^\circ - 22.6/-30^\circ = 28.3/-173.1^\circ \text{ A}$$

11.11 أوجد قراءة الواطمترين الموضوعين في الخطين A ، B للدائرة في المسألة 11-10 (الخط C هو

خط مقارنة الجهد لكل الجهازين).

$$W_A = \text{Re}(V_{ACM} I_{Aeff}^*) = \text{Re} \left[(240/60^\circ) \left(\frac{29.6}{\sqrt{2}} / -46.7^\circ \right) \right]$$

$$= \text{Re}(5023/13.3^\circ) = 4888 \text{ W}$$

$$W_B = \text{Re}(V_{BCM} I_{Beff}^*) = \text{Re} \left[(240/0^\circ) \left(\frac{19.7}{\sqrt{2}} / 66.7^\circ \right) \right]$$

$$= \text{Re}(3343/66.7^\circ) = 1322 \text{ W}$$

لاحظ أن $W_A + W_B = 6210 \text{ W}$ والذي يتفق مع قيمة P_T في المسألة 11-10 .

11.12 نظام ثلاثي ذو أربعة أسلاك ABC وجهد الخط $V_{BC} = 294.2/0^\circ$ متصل به حمل ثلاثي على

شكل نجمة $Z_C = 10/0^\circ \Omega$ ، $Z_B = 10/30^\circ \Omega$ ، $Z_A = 10/-30^\circ \Omega$ (شكل 11-31).

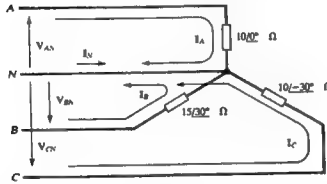
أوجد تيارات الخط والتعادل.

$$I_A = \frac{169.9/90^\circ}{10/0^\circ} = 16.99/90^\circ \text{ A}$$

$$I_B = \frac{169.9/-30^\circ}{15/30^\circ} = 11.33/-60^\circ \text{ A}$$

$$I_C = \frac{169.9/-150^\circ}{10/-30^\circ} = 16.99/-120^\circ \text{ A}$$

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) = 8.04/69.5^\circ \text{ A}$$



شكل 11-31

11.13 حمل نجمة الثلاثي $Z_C = 10 \angle -30^\circ \Omega$ ، $Z_B = 15 \angle 30^\circ \Omega$ ، $Z_A = 10 \angle 0^\circ \Omega$ كما في

شكل 11-32 يغذي بنظام ثلاثي الأوجه ثلاث أسلاك ABC والذي فيه $V_{BC} = 208 \angle 0^\circ \text{ V}$.

أوجد الجهود على المقاومات وإزاحة جهد التعادل V_{ON} .

يمكن استخدام طريقة مثال 11-7 هنا حيث نحل معادلة جهد عقدة واحدة وأيضاً يمكن الحل

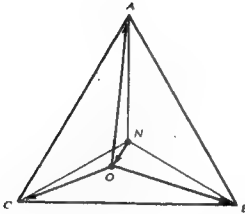
بطريقة أخرى باستخدام تيارات الشبكة I_1 ، I_2 كما في شكل 11-32.

$$\begin{bmatrix} 10/0^\circ + 15/30^\circ & -15/30^\circ \\ -15/30^\circ & 15/30^\circ + 10/-30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208/120^\circ \\ 208/0^\circ \end{bmatrix}$$

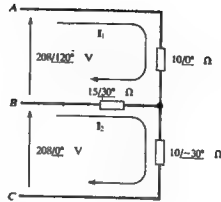
وبالحل : $I_2 = 10.21 \angle 52.41^\circ \text{ A}$ ، $I_1 = 14.16 \angle 86.09^\circ \text{ A}$ وتكون تيارات الخطوط .

$$I_A = I_1 = 14.16/86.09^\circ \text{ A} \quad I_B = I_2 - I_1 = 8.01/-48.93^\circ \text{ A} \quad I_C = -I_2 = 10.21/-127.59^\circ \text{ A}$$

. والآن يمكن حساب متجهات الجهود عند الحمل .



شكل 11-33



شكل 11-32

$$V_{AO} = I_A Z_A = 141.6/86.09^\circ \text{ V}$$

$$V_{BO} = I_B Z_B = 120.2/-18.93^\circ \text{ V}$$

$$V_{CO} = I_C Z_C = 102.1/-157.59^\circ \text{ V}$$

$$V_{ON} = V_{OA} + V_{AN} = 141.6/-93.91^\circ + 120.1/90^\circ = 23.3/-114.53^\circ \text{ V}$$

ومخطط المتجهات مبين في شكل 11-33.

11.14 أوجد القدرة الكلية المتوسطة لحمل نجمة الغير متزن في المسألة 11-13 وقارن بقراءتي والواقتران

في الخططين B ، C .

قدرات الوجه هي :

$$P_A = I_{Aeff}^2 R_A = \left(\frac{14.16}{\sqrt{2}} \right) (10) = 1002.5 \text{ W}$$

$$P_B = I_{Beff}^2 R_B = \left(\frac{8.01}{\sqrt{2}} \right) (15 \cos 30^\circ) = 417.0 \text{ W}$$

$$P_C = I_{Ceff}^2 R_C = \left(\frac{10.21}{\sqrt{2}} \right) (10 \cos 30^\circ) = 451.4 \text{ W}$$

وبالتالي فإن القدرة الكلية المتوسطة هي 1870.9 W .

من نتائج المسألة 11-13 فإن قراءتي والواقتران هي :

$$W_B = \text{Re} (V_{BAeff} I_{Beff}^*) = \text{Re} \left[\left(\frac{208}{\sqrt{2}} \angle -60^\circ \right) \left(\frac{8.01}{\sqrt{2}} \angle 48.93^\circ \right) \right] = 817.1 \text{ W}$$

$$W_C = \text{Re} (V_{CAeff} I_{Ceff}^*) = \text{Re} \left[\left(\frac{208}{\sqrt{2}} \angle 240^\circ \right) \left(\frac{10.21}{\sqrt{2}} \angle 127.59^\circ \right) \right] = 1052.8 \text{ W}$$

والقدرة الكلية المقروءة بالواتمتران هي 1869.9 W .

11.15 حمل ثلاثي متزن على شكل دلتا يقرأ جهاز الواتمتران له 1154 W ، 577 W . أوجد معاوقة الحمل إذا كان جهد الخط 141.4 V .

$$\pm \tan \theta = \sqrt{3} \left(\frac{W_2 - W_1}{W_1 + W_2} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{577}{1154} \right) = 0.577 \quad \theta = \pm 30.0^\circ$$

ومن العلاقة $P_T = \sqrt{3} V_{L\text{eff}} I_{L\text{eff}} \cos \theta$.

$$Z_\Delta = \frac{V_{L\text{eff}}}{I_{L\text{eff}}} = \frac{\sqrt{3} V_{L\text{eff}}}{I_{L\text{eff}}} = \frac{3V^2 \cos \theta}{P_T} = \frac{3(100)^2 \cos 30.0^\circ}{1154 + 577} \Omega = 15.0 \Omega$$

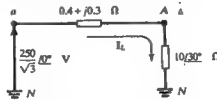
ولذلك $Z_\Delta = 15.0 \angle \pm 30^\circ \Omega$.

11.16 حمل ثلاثي Δ متزن به $Z_\Delta = 30 \angle 30^\circ \Omega$ متصل بنظام ثلاثي الأوجه ثلاث أسلاك 250 V بموصلات لها المعاوقات $Z = 0.4 + j 0.3 \Omega$. أوجد جهد الخط عند الحمل .

الدائرة المكافئة للوجه الواحد مبينة شكل 11-34 . وتقسيم الجهد فإنه بالتعويض يكون الجهد للحمل Y كما يلي :

$$V_{AN} = \left(\frac{10 \angle 30^\circ}{0.4 + j 0.3 + 10 \angle 30^\circ} \right) \left(\frac{250}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \right) = 137.4 \angle -0.33^\circ \text{ V}$$

whence $V_L = (137.4)(\sqrt{3}) = 238.0 \text{ V}$.



شكل 11-34

وباعتبار القيم فقط فإن جهد الخط 2380 V عند الحمل يمثل خفضاً في الجهد 12.0 V . ونحدد قيمة المقاومة في Z_C كل من مقطع السلك وطوله بينما يؤثر في الممانعة الحثية نوع مادة السلك (صلب - النيوم - فبر . . .) وأيضاً الطول .

مسائل إضافية

الإجابات المعطاة للمسائل الآتية لم تشمل على المخطط الإتجاهي للجهود والتيار . ومع ذلك فقد يطلب ذلك فى المسائل ، وعموماً فإن شكل المتجهات يجب رسمه لكل مسألة متعددة الأوجه .

11.17 ثلاث معاوقات Ω $53.13^\circ / 10.0$ متصلة على شكل دلتا إلى منبع ABC جهده $V_{BC} = 495.0 \angle 0^\circ$. أوجد تيارات الخط .

$$\text{الجواب: } I_A = 58.8 / -143.13^\circ \text{ A, } I_B = 58.8 / -23.13^\circ \text{ A, } I_C = 58.8 / 96.87^\circ \text{ A}$$

11.18 ثلاث معاوقات بقيم Ω $35^\circ / 42.0$ متصلة على شكل دلتا إلى منبع ثلاثى ABC جهده $V_{BC} = 495.0 \angle 0^\circ$. أوجد تيارات الخط .

$$\text{الجواب: } I_A = 20.41 / 125^\circ \text{ A, } I_B = 20.41 / 5^\circ \text{ A, } I_C = 20.41 / -115^\circ \text{ A}$$

11.19 نظام ثلاثى أوجه ثلاث أسلاك بجهد خط فعال 100 V له التيارات .

$$I_A = 15.41 / -160^\circ \text{ A} \quad I_B = 15.41 / -40^\circ \text{ A} \quad I_C = 15.41 / 80^\circ \text{ A}$$

ما هو تعاقب النظام وما هى المعاوقات إذا كانت متصلة على شكل دلتا؟

$$\text{الجواب: } \Omega \text{ } 15.9 \angle 70^\circ \text{ CBA.}$$

11.20 حمل Y متزن له المعاوقات Ω $45^\circ / 6.0$ متصل بنظام ثلاثى CBA جهده الخط الفعالي 208 V . أوجد تيار الأربع خطوط .

$$\text{الجواب: } I_A = 28.31 / -135^\circ \text{ A, } I_B = 28.31 / -15^\circ \text{ A, } I_C = 28.31 / 105^\circ \text{ A, } I_N = 0$$

11.21 حمل Y متزن له المعاوقات Ω $L20^\circ / 65.0$ متصل بنظام ثلاثى CBA ثلاث أسلاك حيث $V_{AB} = 678.8 \angle -120^\circ$. أوجد تيارات الخط الثلاثة .

$$\text{الجواب: } I_A = 6.03 / -70^\circ \text{ A, } I_B = 6.03 / 50^\circ \text{ A, } I_C = 6.03 / 170^\circ \text{ A}$$

11.22 حمل Δ متزن به Ω $30^\circ / 9.0$ وحمل Y متزن به Ω $45^\circ / 5.0$ تغذى بنفس النظام الثلاثى ABC ذو جهد خط فعال 480 V . أوجد تيارات الخط باستخدام طريقة دائرة الوجه الواحد المكافئة .

الجواب: $I_A = 168.9/93.36^\circ$ A, $I_B = 168.9/-26.64^\circ$ A, $I_C = 168.9/-146.64^\circ$ A

11.23 حمل Δ متزن له المعاوقات $27.0 \angle -25^\circ \Omega$ وحمل Y متزن له المعاوقات $10.0 \angle 30^\circ \Omega$ تتغذى بنفس النظام الثلاثي ABC حيث الجهد $V_{CN} = 169.8 \angle -150^\circ$ V أوجد تيارات الخط .

الجواب: $I_A = 35.8/117.36^\circ$ A, $I_B = 35.8/-2.64^\circ$ A, $I_C = 35.8/-122.64^\circ$ A

11.24 حمل متزن Δ له المعاوقات $10.0 \angle -36.9^\circ \Omega$ وحمل Y متزن تتغذى بنفس النظام الثلاثي ABC حيث $V_{CA} = 141.4 \angle 240^\circ$ V . فإذا كان $I_B = 40.44 \angle 13.41^\circ$ A فما هي معاوقات الحمل المتصل على شكل Y . الجواب: $5.0 \angle -53.3^\circ$.

11.25 نظام ثلاثي ABC جهد الخط الفعال 500 V له حمل متصل Δ كالتالي :

$$Z_{AB} = 10.0 \angle 30^\circ \Omega \quad Z_{BC} = 25.0 \angle 0^\circ \Omega \quad Z_{CA} = 20.0 \angle -30^\circ \Omega$$

أوجد تيارات الخط .

الجواب: $I_A = 106.1/90.0^\circ$ A, $I_B = 76.15/-68.20^\circ$ A, $I_C = 45.28/-128.65^\circ$ A

11.26 نظام ثلاثي ABC به $V_{BC} = 294.2 \angle 0^\circ$ V له الحمل Δ التالي :

$$Z_{AB} = 5.0 \angle 0^\circ \Omega \quad Z_{BC} = 4.0 \angle 30^\circ \Omega \quad Z_{CA} = 6.0 \angle -15^\circ \Omega$$

أوجد تيارات الخط .

الجواب: $I_A = 99.7/99.7^\circ$ A, $I_B = 127.9/-43.3^\circ$ A, $I_C = 77.1/-172.1^\circ$ A

11.27 نظام ثلاثي ABC ذو أربعة أسلاك جهد الخط الفعال 100 V له معاوقات Y التالية :

$$Z_A = 3.0 \angle 0^\circ \Omega \quad Z_B = 3.61 \angle 56.31^\circ \Omega \quad Z_C = 2.24 \angle -26.57^\circ \Omega$$

أوجد التيارات I_A ، I_B ، I_C ، I_N .

الجواب: $I_A = 38.6/65.3^\circ$ A, $I_B = 36.4/176.6^\circ$ A, $I_C = 22.6/-26.3^\circ$ A, $I_N = 27.2/-90^\circ$ A

11.28 نظام ثلاثي ABC أربعة أسلاك به $V_{BC} = 294.2 \angle 0^\circ$ V له معاوقات Y التالية :

$$Z_A = 12.0 \angle 45^\circ \Omega \quad Z_B = 10.0 \angle 30^\circ \Omega \quad Z_C = 8.0 \angle 0^\circ \Omega$$

أوجد التيارات I_A ، I_B ، I_C ، I_N .

الجواب: $A \ 15.32/90.4^\circ$ ، $A \ 21.24/-150^\circ$ ، $A \ 16.99/-60^\circ$ ، $A \ 14.16/45^\circ$

11.29 حمل متصل به $Z_A = 10 \angle 0^\circ \Omega$ ، $Z_B = 10 \angle 60^\circ \Omega$ ، $Z_C = 10 \angle -60^\circ \Omega$ متصل بنظام ثلاثي ABC به الجهد الفعال للخط $V = 141.4$. أوجد جهد الحمل V_{AO} ، V_{BO} ، V_{CO} وجهد الإزاحة لنقطة التعادل V_{ON} . أنشئ مخطط متجهات يشابه لشكل 11-18 .

الجواب: $V \ 57.73/-90^\circ$ ، $V \ 100/180^\circ$ ، $V \ 100/0^\circ$ ، $V \ 173.2/90^\circ$

11.30 حمل Y به $Z_A = 10 \angle -60^\circ \Omega$ ، $Z_B = 10 \angle 0^\circ \Omega$ ، $Z_C = 10 \angle 60^\circ \Omega$ متصل بنظام ثلاثي ABC به الجهد الفعال للخط $V = 147.1$. أوجد تيارات الخط I_A ، I_B ، I_C .

الجواب: $A \ 0.20 \angle 120^\circ$ ، $A \ 0.20 \angle -60^\circ$.

11.31 نظام ثلاثي أسلاك ABC متصل به حملاً متزاناً له جهد خط $V = 200$ و تيار خط (قيمة عظمى) $I_A = 13.61 \angle 60^\circ A$. أوجد القدرة الكلية.

الجواب: $2887 W$.

11.32 حملان متزانان Δ بالمعاوقات $20 \angle -60^\circ \Omega$ ، $18 \angle 45^\circ \Omega$ على الترتيب متصل بنظام ثلاثي الأوجه الذي به جهد خط $V_{BC} = 212.1 \angle 0^\circ V$. أوجد قدرة الوجه لكل حمل بعد استخدام طريقة الخط الواحد المكافئة للحصول على تيار الخط الكلي . احسب القدرة الكلية . وقارن مع مجموعة قدرات الثلاثة أوجه .

الجواب: $562.3 W$ ، $883.6 W$ ، $4337.5 W = 3(562.3 W) + 3(883.6 W)$

11.33 في المسألة 11.5 نتج عن توصيل الحمل Δ المتزن $Z = 20 \angle 45^\circ$ تيار الخط $A \ 8.65$ لجهد خط $100 V$ وكلاهما قيم عظمى . أوجد قراءة الواطمتريين المستخدمين لقياس القدرة الكلية .

الجواب: $111.9 W$ ، $417.7 W$.

11.34 أوجد قراءة الواطمتريين في النظام ثلاثي الأوجه ذو الثلاث أسلاك ، جهد خط $V = 240$ وبه حمل متزن Δ $20 \angle 80^\circ \Omega$. الجواب: $3206 W$ ، $-1706 W$.

11.35 نظام ثلاثي أوجه ABC به جهد خط $V_{BC} = 311.1 \angle 0^\circ$. له تيارات خط .

$$I_a = 61.5 \angle 116.6^\circ \text{ A} \quad I_b = 61.2 \angle -48.0^\circ \text{ A} \quad I_c = 16.1 \angle 218^\circ \text{ A}$$

أوجد قراءة الواطمتين في الخطوط (أ) A ، B . (ب) B ، C . (ج) C ، A .

الجواب : (a) 5266 W, 6370 W; (b) 9312 W, 2322 W; (c) 9549 W, 1973 W

11.36 نظام ثلاثي أوجه ثلاث أسلاك ABC له جهد خط فعال 440 V وتيارات الخط

$$I_a = 27.9 \angle 90^\circ \text{ A} \quad I_b = 81.0 \angle -9.9^\circ \text{ A} \quad I_c = 81.0 \angle 189.9^\circ \text{ A}$$

أوجد قراءتي الواطمتين في الخطوط (أ) A ، B . (ب) B ، C .

الجواب : (a) 7.52 kW, 24.8 kW; (b) 16.16 kW, 16.16 kW

11.37 اتصل واقتربان في نظام ثلاثي أسلاك له جهد فعال 120 V وقرأن 500 W ، 1500 W ، فما

هو قيمة معاوقة الحمل Δ المتزن؟

$$\text{الجواب : } 16.3 \angle \pm 40.9^\circ \Omega$$

11.38 نظام ثلاث أوجه ثلاث أسلاك ABC جهده الفعال 173.2 V وكانت قراءة الواطمتين

التصلان بالخط A ، B هي 1327 W ، -301 W . أوجد معاوقة الحمل Y المتزن . حيث أنه قد

تحد التعاقب فإن إشارة زاوية المعاوقة يمكن تحديدها . الجواب : $10 \angle -70^\circ \Omega$

11.39 نظام ثلاث أوجه ثلاث أسلاك جهد الخط $V_{BC} = 339.4 \angle 0^\circ$ به حمل متزن Y بالقيمة $Z_Y =$

$15 \angle 60^\circ \Omega$. وكانت المعاوقة بين خط النظام والحمل $26.57 \angle 26.57^\circ \Omega$. أوجد جهد الخط عند

الحمل . الجواب : 301.1 V .

11.40 أعد حل المسألة 11.39 مع حمل معاوقة $15 \angle -60^\circ \Omega$. $Z_Y =$ برسم متجهات الجهد والتيار

للحالتين بين تأثير زاوية معاوقة الحمل على الفقد في الجهد بالنسبة لمعاوقة خط معروفة .

الجواب : 332.9 V .

الفصل الثاني عشر

الاستجابة الترددية والمرشحات والرنين

12.1 الاستجابة الترددية

استجابة الدوائر الخطية للدخل الجيبي يكون أيضاً جيبياً وينفس التردد ولكن ربما بقيمة عظمى وزاوية وجه مختلفة . وهذه الاستجابة يكون دالة في التردد . وقد علمنا مؤخراً أن التغير الجيبي يمكن تمثيله بمتجه ذو قيمة وزاوية . وتعرف الاستجابة الترددية بنسبة متجه المخرج إلى متجه الدخول . وهي دالة حقيقية في ω وتعطى بالعلاقة :

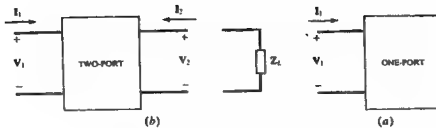
$$H(j\omega) = \text{Re}[H] + j \text{Im}[H] = |H|e^{j\theta} \quad (1a)$$

حيث $\text{Re}[H]$ ، $\text{Im}[H]$ هي الأجزاء الحقيقية والتخيلية للقيمة $H(j\omega)$ وكلاً من $|H|$ ، θ هي القيمة وزاوية الوجه . $\text{Re}|H|$ ، $\text{Im}|H|$ ، H ، θ هي عموماً دالة في ω وترتبط ببعضها بالعلاقاتين التاليتين :

$$|H|^2 = |H(j\omega)|^2 = \text{Re}^2[H] + \text{Im}^2[H] \quad (1b)$$

$$\theta = \angle H(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[H]}{\text{Re}[H]} \quad (1c)$$

ويعتمد تمحايوب التردد إذن على اختيار كلاً من متغير الدخول والمخرج فمثلاً إذا وصل منبع جهد على طرفي الشبكة شكل 12-1(a) فإن تيار المتبع يمثل الدخول وجهد المتبع يمثل المخرج . وفي هذه الحالة فإن معاوقة الدخول $Z = V_1/I_1$ تمثل تمحايوب التردد . وبالعكس إذا استخدم منبع جهد للدخول وتم قياس تيار الأطراف فإن مسامحة الدخول $Y = I_1/V_1 = 1/Z$ تمثل تمحايوب التردد .



شكل 12-1

وللشبكة ذات المدخلين شكل (b) 12-1 فإن تجاوبات التردد تعرف كما يلي :

$$Z_{in} = (j\omega) = V_1/I_1 \quad \text{معاوقة الدخل}$$

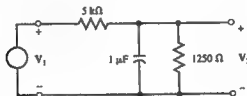
$$Y_{in} = (j\omega) = V_1/Z_{in}(j\omega) = Z_1/V_1 \quad \text{مسامحة الدخل}$$

$$H_v = (j\omega) = V_2/V_1 \quad \text{نسبة جهد الانتقال}$$

$$H_i = (j\omega) = I_2/I_1 \quad \text{نسبة تيار الانتقال}$$

$$V_2/I_1, V_1/I_2 \quad \text{معاوقة الانتقال}$$

مثال 12.1 : أوجد تجاوب التردد V_2/I_1 للدائرة ذات المدخلين في شكل 12-2 .



شكل 12-2

ضع Y_{RC} لتكون المسامحة لمجموعة دائرة التوازي RC . وبالتالي $Y_{RC} = 10^{-6} j\omega + 1/1250$. ونحصل على V_2/V_1 بتقسيم V_1 بين المقاومة $5 k\Omega$ ،

$$H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_{RC}}{Z_{RC} + 5000} = \frac{1}{1 + 5000Y_{RC}} = \frac{1}{5(1 + 10^{-3}j\omega)} \quad (2a)$$

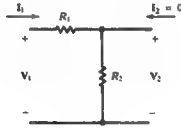
$$|H| = \frac{1}{5\sqrt{1 + 10^{-6}\omega^2}} \quad \theta = -\tan^{-1}(10^{-3}\omega) \quad (2b)$$

حل آخر: نحصل أولاً على مكافئ ثنائي الجزء المقاومة للدائرة $V_1/5$ ، $R_{Th} = 1 \text{ k}\Omega$ ، V_{Th} نقسم V_{Th} بين R_{Th} والمكثف $1 \mu\text{F}$ لنحصل على (2a).

12.2 الشبكات ذات الإمرار العالي وذات الإمرار المنخفض

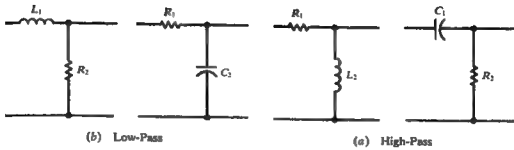
شكل 12-3 يبين مقسم جهد من المقاومات في حالة عدم الحمل مع البيان المعتاد للاتجاهين للجهد والتيار . وبذلك يكون دالة تحويل الجهد ومعاوقة الدخل كالتالي :

$$H_{vm}(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad H_{Zm}(\omega) = R_1 + R_2$$



شكل 12-3

والعلامة ∞ تدل على حالة عدم الحمل . وكلا H_{vm} ، H_{Zm} هي ثوابت حقيقية لا تتوقف على التردد حيث أنه لا يوجد عناصر للممانعة . وإذا احتوت الشبكة على ملف أو مكثف فإن كلا H_{vm} ، H_{Zm} سيكون مركباً وسيتغير مع التردد . وإذا تناقص $|H_{vm}|$ كلما زاد التردد فإن الأداء يسمى توقف أداء التردد العالي وتكون الدائرة شبكة إمرار منخفض . وبالعكس فإن الشبكة ذات الإمرار العالي سيكون لها أداء تردد منخفض مع تناقص $|H_{vm}|$ كلما تناقص التردد . شكل 12-4 يبين أربعة دوائر ذات العناصر . اثنتين للإمرار العالي واثنين للإمرار المنخفض .



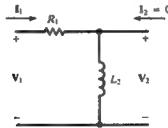
شكل 12-4

تكون دائرة الإمرار العالي RL المبينة شكل 12-5 دائرة مفتوحة أو في حالة عدم الحمل . وتكون استجابة تردد معاوقة الدخل محدداً برسم القيمة وزاوية الوجه للعلاقة .

$$H_{in}(\omega) = R_1 + j\omega L_2 = |H_z|/\theta_H$$

وبالقسمة على R_1 ويكتابة R_1/L_2 تكون الصورة العامة .

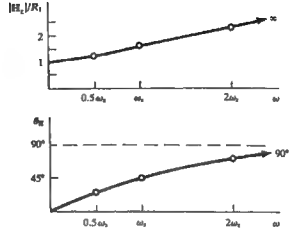
$$\frac{H_z(\omega)}{R_1} = 1 + j(\omega/\omega_2) = \sqrt{1 + (\omega/\omega_2)^2} / \tan^{-1}(\omega/\omega_2)$$



شكل 12-5

وتكون خمس قيم للمقدار ω هي المعلومات الكافية لرسم $|H_z|/R_1$ ، كما هو مبين شكل 12-6 . وتقترب القيمة من ما لا نهاية كلما زاد التردد وبالتالي فإنه عند الترددات العالية يكون تيار الشبكة I_1 صفراً .

ω	$ H_v /R_1$	θ_H
0	1	0°
$0.5\omega_c$	$0.5\sqrt{3}$	26.6°
ω_c	$\sqrt{2}$	45°
$2\omega_c$	$\sqrt{3}$	63.4°
∞	∞	90°



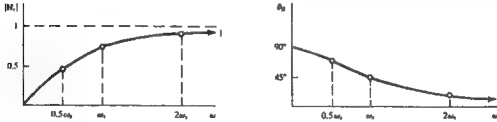
شكل 12-6

وبطريقة مشابهة يمكن الحصول على استجابة التردد لنسبة جهدى الخرج والدخل . وبتقسيم الجهد فى حالة عدم الحمل نصل إلى :

$$H_{vv}(\omega) = \frac{j\omega L_2}{R_1 + j\omega L_2} = \frac{1}{1 - j(\omega_c/\omega)}$$

ومن ثم $|H_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_c/\omega)^2}}$ and $\theta_H = \tan^{-1}(\omega_c/\omega)$

ورسمت القيمة والزاوية فى شكل 12-7 . وتقرب دالة التحويل هذه من الوحدة عند التردد الى حيث يكون جهدا الخرج هو نفسه جهد الدخل ومن هنا نشأت التسمية «توقف أداء التردد منخفض» والتعريف «إمرار عالى» .

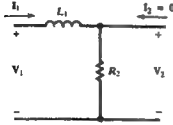


شكل 12-7

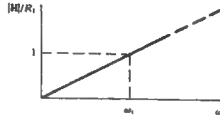
وتكون معاوقة الانتقال لدائرة الإمرار العالي RL في حالة عدم الحمل هي :

$$H_u(\omega) = \frac{V_2}{I_1} = j\omega L_2 \quad \text{or} \quad \frac{H_u(\omega)}{R_1} = j \frac{\omega}{\omega_c}$$

والزاوية ثابتة عند 90° ويكون شكل تغير القية مع ω خطاً مستقيماً مشابهاً لرسم ωL مع ω في الممانعة. انظر شكل 12-8.



شكل 12-9



شكل 12-8

ويتبادل أماكن R ، L ينتج عنه شبكة إمرار منخفض مع إيقاف عند التردد العالي (شكل 12-9) وفي حالة الدائرة المفتوحة.

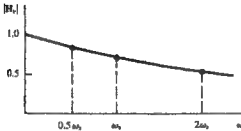
$$H_{un}(\omega) = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L_1} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_c)}$$

مع $\omega_c = R_2/L_1$ أي أنه :

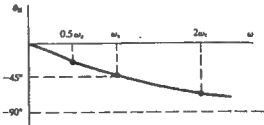
$$|H_u| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \quad \text{and} \quad \theta_H = \tan^{-1}(-\omega/\omega_c)$$

ورسم كلاً من القيمة والزاوية مبين شكل 12-10. وتقترب دالة تحويل الجهد H_{uo} من الصفر عند الترددات العالية ومن الوحدة عند $\omega = 0$ وبالتالي تسمى إمرار منخفض.

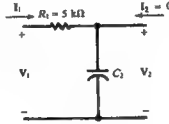
وسنحصل على دوال أخرى للشبكة ذات الإمرار المنخفض في المسائل المحلولة.



شكل 12-10



مثال 12-2 : أوجد دالة جهد التحويل H_{vo} للدائرة المفتوحة المبينة شكل 12-11 . عند أى تردد تكون $|H_v| = 1/\sqrt{2}$ إذا كان (أ) $C_2 = 10 \text{ nF}$ ، (ب) $C_2 = 1 \text{ nF}$.



شكل 12-11

$$H_{vo}(\omega) = \frac{1/j\omega C_2}{R_1 + (1/j\omega C_2)} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_c)} \quad \text{where} \quad \omega_c = \frac{1}{R_1 C_2} = \frac{2 \times 10^{-4}}{C_2} \quad (\text{rad/s})$$

$$(a) \quad |H_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}}$$

and so $|H_v| = 1/\sqrt{2}$ when

$$\omega = \omega_c = \frac{2 \times 10^{-4}}{10 \times 10^{-9}} = 2 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

or when $f = (2 \times 10^4)/2\pi = 3.18 \text{ kHz}$.

$$(b) \quad f = \frac{10}{1} (3.18) = 31.8 \text{ kHz}$$

وبمقارنة (أ) مع (ب) يبدو أنه كلما كانت قيمة C_2 أكبر كلما كان التردد أصغر الذى عنده $|H_v|$ ينخفض إلى 0.707 من قيمته العظمى 1 أى أن معظم رسم $|H_v|$ المبين بشكل 12-10 يزاح إلى اليسار. وبالتالي فإى مكثف تقديرى على التوازي مع C_2 يودى إلى خفض استجابة الدائرة .

12.3 ترددات نصف القدرة

التردد ω_p المحسوبة فى مثال 12-2 تكون عند

$$|H_v| = 0.707 |H_v|_{\max}$$

وتسمى تردد نصف القدرة . وفى هذه الحالة يكون الاسم مبررا فى المسألة 12-5 الذى يبين أن قدرة الدخل للدائرة شكل 12-11 ستكون نصف القيمة العظمى عندما .

$$\left| \frac{1}{j\omega C_2} \right| = R_1$$

أى عندما تكون $\omega = \omega_x$

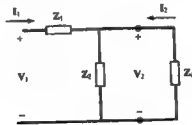
وعموماً فإنه بالنسبة للشبكات ذات العناصر الغير ثابتة ذات الدالة $H(\omega)$ ستصل إلى قيمتها العظمى المطلقة عند تردد واحد معين ω_x وستطلق على التردد الذى عنده

$$|H(\omega)| = 0.707|H(\omega_x)|$$

بتردد نصف القدرة (أو نقطة نصف القدرة) سواء كانت القيمة الفعلية للتردد مساوية أو غير مساوية 50% من القدرة . وفى معظم الحالات $0 < \omega_x < \infty$ وبالتالي فإنه يوجد ترددين لنصف القدرة أحدهما بعد القيمة العظمى للتردد والآخر بعدها . وهى تسمى تردد (نقط) نصف القدرة العلوى والسفلى والمسافة بينهما هى عرض النطاق الذى يساعد فى قياس حدة القيمة العظمى .

12.4 الشبكات العامة ذات المدخلين والعنصرين

الشبكة الأساسية التى تحتوى على RL أو RC من النوع الذى درس فى بند 12-2 يمكن تعميمها بالمعاقبتين Z_1 و Z_2 كما هو مبين شكل 12-12 وتتصل معاوقة الحمل Z_L على طرفى الخرج .



شكل 12-12

بتقسيم الجهد .

$$V_2 = \frac{Z'}{Z_1 + Z'} V_1 \quad \text{or} \quad H_v = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z'}{Z_1 + Z'}$$

حيث $Z' = Z_2 Z_L / (Z_2 + Z_L)$ وهى المعاوقة المكافئة للمعاوقتين Z_2 ، Z_L على التوازي .
وتحسب بالمثل دوال التحويل الأخرى وهى مينة فى جدول 12-1 .

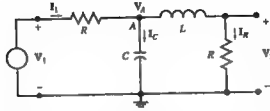
جدول 12-1

Network Function Output Condition	$H_z = \frac{V_1}{I_1} \quad (\Omega)$	$H_v = \frac{V_2}{V_1}$	$H_i = \frac{I_2}{I_1}$	$H_v H_i = \frac{V_2}{I_1} \quad (\Omega)$	$\frac{H_i}{H_z} = \frac{I_2}{V_1} \quad (S)$
Short-circuit, $Z_L = 0$	Z_1	0	-1	0	$-\frac{1}{Z_1}$
Open-circuit, $Z_L = \infty$	$Z_1 + Z_2$	$\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$	0	Z_2	0
Load, Z_L	$Z_1 + Z'$	$\frac{Z'}{Z_1 + Z'}$	$-\frac{Z_2}{Z_2 + Z_L}$	Z'	$\frac{-Z'}{Z_L(Z_1 + Z')}$

12.5 الاستجابة الترددية ودوال الشبكة

يمكن الحصول على تجاوب التردد للشبكة بتمويض $j\omega$ بدلاً من s فى دالة الشبكة وهذه الطريقة المفيدة مينة فى المثال التالى :

مثال 12.3 : أوجد (أ) دالة الشبكة $H(s) = V_2/V_1$ فى الدائرة المبينة شكل 12-13 . (ب) $H(j\omega)$ لقيم $L/C = R^2$ ، $LC = 2/\omega_0^2$. (ج) القيمة وزاوية الوجه للقيمة $H(j\omega)$ فى (ب) لقيمة $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$.



شكل 12-13

(أ) بفرض أن V_2 معروفة استخدم المعاوقات العامة LS ، $1/CS$ وحل قيم V_1 .

$$I_R = V_2 / R \text{ من}$$

$$V_A = (R + LS)I_R = \frac{R + LS}{R} V_2 \quad (3)$$

$$I_C = CSV_A = \frac{CS(R + LS)}{R} V_2 \quad \text{and} \quad I_1 = I_R + I_C = \frac{V_2}{R} + \frac{CS(R + LS)}{R} V_2 = \frac{1 + CS(R + LS)}{R} V_2$$

$$\text{Then,} \quad V_1 = V_A + RI_1 = \frac{R + LS}{R} V_2 + [1 + CS(R + LS)]V_2$$

$$\text{and} \quad H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2 + (L/R + CR)s + LCs^2} \quad (4a)$$

(ب) من $LC = 2/\omega_0^2$ ، $L/C = R^2$ نحصل على $L = \sqrt{2R/\omega_0}$ ، $C = \sqrt{2R/\omega_0}$ وبالتعويض في C ، L في المعادلة (4a) نحصل على:

$$H(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \right) \quad \text{or} \quad H(j\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + j\sqrt{2}(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2} \right) \quad (4b)$$

$$|H|^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 + (\omega/\omega_0)^4} \right) \quad \text{and} \quad \theta = -\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

لاحظ أن $H(j\omega)$ لا تتوقف على R وتغمر الشبكة القيم الجيبية ذات التردد المنخفض وتضعف القيم الجيبية ذات التردد العالي . ويكون بذلك مرشح إمرار منخفض بتردد نصف القدرة بالقيمة $\omega = \omega_0$ وفي هذه الحالة تكون قيمة تجاوب التردد هو $\sqrt{2}/4$ $|H(j\omega)| = |H(0)|$ وزاوية الوجه $\angle H(j\omega_0) = -\pi/2$.

(ج) لقيم $\omega_0 = 1$

$$H(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}s + s^2} \right) \quad \text{or} \quad H(j\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + j\sqrt{2}\omega - \omega^2} \right) \quad - (4c)$$

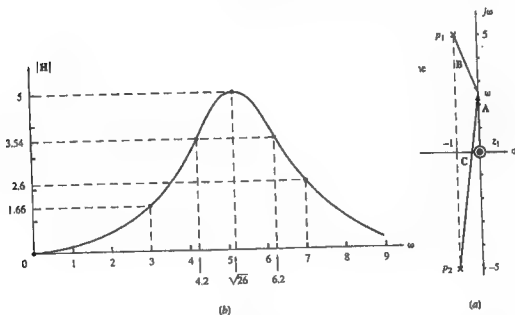
$$|H|^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \omega^4} \quad \text{and} \quad \theta = -\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}\omega}{1 - \omega^2} \right)$$

شبكة RC المبينة شكل (b) 12-4 قد عرفت كمرشح إمرار منخفض من الدرجة الأولى بتردد نصف القدرة عند $\omega_0 = 1/R_1C_2$ وتسمى الدائرة شكل 12-13 بمرشح بتروث من الدرجة الثانية ولها قطع حاد .

12.6 الاستجابة الترددية من وضع قطب/ صفر

تجاوب التردد للشبكة هو قيمة دالة الشبكة $H(s)$ عند $s = j\omega$. وتستخدم هذه الملاحظة لإيجاد قيم $H(j\omega)$ بالرسم وطريقة الرسم يمكن أن ينتج عنها رسم سريع لقيم $H(j\omega)$ موضعاً سلوكها بجوار القطب أو الصفر بدون الحاجة إلى الحل الكامل .

مثال 12.4 : أوجد أقطاب وأصفار الدالة $H(s) = 10s / (s^2 + 2s + 26)$ ثم ضعها في مجال s واستخدم أماكن قطب/ صفر لرسم $H(j\omega)$.



شكل 12-14

$H(s)$ لها قيمة صفر عند $Z_1 = 0$ ونوجد قطبيها P_1 ، P_2 من العلاقة $s^2 + 2s + 26 = 0$ حيث $P_1 = -1 + j5$ ، $P_2 = -1 - j5$ ورسم قطب/ صفر مبين شكل 12-14(a) وتكتب دالة الشبكة كالتالي :

$$H(s) = (10) \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

لكل قيمة لـ s يكون الحد $(s - z_1)$ متجهاً يبدأ من صفر Z_1 وينتهي عند نقطة s في مجال s . وبالمثل فإن $s - p_1$ ، $s - p_2$ هما متجهان مرسومان من القطبين p_1 ، p_2 على الترتيب إلى النقطة s . وبالتالي فإنه لأي قيمة لـ s يمكن التعبير عن دالة الشبكة بدلالة الثلاث متجهات A ، B ، C كالآتي :

$$H(s) = (10) \frac{A}{B \times C} \quad \text{where } A = (s - z_1), B = (s - p_1), \text{ and } C = (s - p_2)$$

قيمة وزاوية الوجه للمقدار $H(s)$ عند أى نقطة فى مستوى s يمكن الحصول عليها من :

$$|H(s)| = (10) \frac{|A|}{|B| \times |C|} \quad (5a)$$

$$\angle H(s) = \angle A - \angle B - \angle C \quad (5b)$$

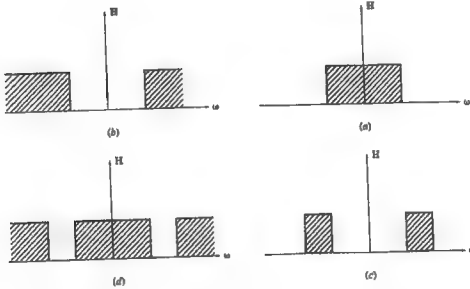
يوضع s على محور $j\omega$ [شكل 12-14(a)] ويتغير ω من 0 إلى ∞ وقياس القيم وزوايا الوجه للمتجهات A ، B ، C يمكن استخدام (5a) ، (5b) لإيجاد رسم القيم وزوايا الوجه. وشكل 12-14(b) يبين رسم القيم.

12.7 المرشحات المثالية والعملية

تعتبر الشبكات بوجه عام ذات ترددات محددة والمرشحات هي نوع من الشبكات تصمم لتكون ذات خصائص محددة بالنسبة للتردد فهي تمرر ترددات معينة (مجال الإمرار) وتوقف ترددات أخرى (مجال الإيقاف) ونظرياً في مجال الإمرار $H(j\omega) = 1$ وفي مجال الإيقاف $H(j\omega) = 0$ وبالتالي فإننا نعرف على الأقسام التالية من المرشحات: إمرار منخفض [شكل 12-15(a)] ، إمرار مرتفع [شكل 12-15(b)] ، إمرار نطاق [شكل 12-15(c)] ، نطاق قفل [شكل 12-15(d)] والمرشحات المثالية لا يمكن وجودها أو تحقيقها ولكننا يمكن بناء وتصميم المرشحات العملية بحيث تكون قريبة بنسب مقبولة من المثالية وكلما كانت قريبة من خواص المرشح المثالي كلما كانت دائرة المرشح العملى أكثر تعقيداً.

الترتيب

دوائر RC أو RL التي فى بند 12-2 هى مرشحات من الرتبة الأولى وهى بعيدة جداً من المرشحات المثالية وكما هو مبين فى المثال التالى فإن تجاوز التردد يمكن أن يقترب من ذلك الخاص بالمرشحات المثالية إذا زادت رتبة المرشح .



شكل 12-15

مثال 12.5 : دوال الشبكة H_1 ، H_2 ، H_3 معطاه بالقيم :

$$(a) H_1 = \frac{1}{s+1} \quad (b) H_2 = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (c) H_3 = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)(s^2 + s + 1)}$$

أوجد القيم لتجاوبات التردد لها وبين أن جميع الثلاث دوال ذات إمرار منخفض عند $\omega_0 = 1$.

$$|H_1|^2 = \frac{1}{(1+j\omega)(1-j\omega)} = \frac{1}{1+\omega^2} \quad (أ)$$

$$|H_2|^2 = \frac{1}{(1-\omega^2 + j\sqrt{2}\omega)(1-\omega^2 - j\sqrt{2}\omega)} = \frac{1}{1+\omega^4} \quad (ب)$$

$$|H_3|^2 = \frac{1}{(1+\omega^3)(1-\omega^2 + j\omega)(1-\omega^2 - j\omega)} = \frac{1}{1+\omega^6} \quad (ج)$$

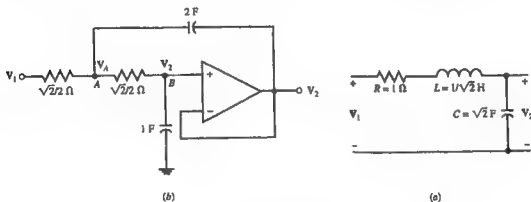
لجميع الثلاث دوال عند $\omega = 0, 1, \infty$ لدينا $|H|^2 = 1, 1/2, 0$ على التوالى . وبذلك فإن دوال الشبكة الثلاثة هى إمرار منخفض ولها نفس تردد نصف القدرة وهو $\omega_0 = 1$ وهى مرشحات بتورث

من الرتبة الأولى والثانية والثالثة على التوالي . وكلما زادت رتبة المرشح كلما كان مجال القطع في تجاوب التردد أكثر حدة .

12.8 المرشحات الغير فعالة والفعالة

المرشحات التي تحتوي على مقاومات وملفات ومكثفات فقط تسمى غير فعالة . وتلك التي تحتوي بالإضافة إلى ذلك منابع تسمى فعالة . والمرشحات الغير فعالة لا تتطلب منابع خارجية للطاقة ويمكن أن تستمر لمدة أطول . وتصنع المرشحات الفعالة غالباً من دوائر RC ومكبرات . وتبين الدائرة شكل 12-16(a) مرشح إمرار منخفض من الدرجة الثانية ويبين شكل الدائرة في شكل 12-16(b) مرشح فعال بتجاوب تردد V_2/V_1 وهو مكافئ للدائرة شكل 12-16(a) .

مثال 12.6 : أوجد دالة الشبكة V_2/V_1 في الدوائر المبينة في (أ) شكل 12-16(a) ، (ب) شكل 12-16(b) .



شكل 12-16

(أ) في شكل 12-16(a) توجد V_2 من V_1 بتقسيم الجهد .

$$V_2 = \frac{1}{Cs} \frac{V_1}{R + Ls + 1/Cs} = \frac{V_1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{1}{LC} \frac{V_1}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$$

Substituting for $R = 1$, $L = 1/\sqrt{2}$, and $C = \sqrt{2}$, and dividing by V_1 , we get

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

(ب) فى شكل 12-16(b) وباستخدام KCL عند نقطتين A ، B مع $V_B = V_2$.

$$(6a) \quad (V_A - V_1)\sqrt{2} + (V_A - V_2)\sqrt{2} + (V_A - V_2)2s = 0 \quad \text{العقدة A :}$$

$$(6b) \quad V_2s + (V_2 - V_A)\sqrt{2} = 0 \quad \text{العقدة B :}$$

ويحذف V_A فى (6a) ، (6b) فإننا نحصل على دالة الشبكة $H(s) = V_2/V_1$ وبذلك :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

لاحظ أن الدوائر لشكلى 12-16(a) ، (b) لهما دوال شبكة متطابقة . وهى مرشحات بتورث من الدرجة الثانية ذات إمرار منخفض بتردد نصف القدرة عند $\omega = 1 \text{ rad/s}$.

12.9 مرشحات إمرار النطاق والرنين

تسمى دالة الشبكة التالية دالة إمرار نطاق .

$$H(s) = \frac{ks}{s^2 + as + b} \quad \text{where } a > 0, b > 0, k > 0 \quad (7)$$

ويعتبر هذا الاسم مناسباً حينما تكون الأقطاب مركبة وقريبة من محور $j\omega$ ويعيده من نقطة الأصل فى مجال s ويكون تمحارب التردد لدالة إمرار النطاق هى :

$$H(j\omega) = \frac{kj\omega}{b - \omega^2 + aj\omega} \quad |H|^2 = \frac{k^2\omega^2}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2} = \frac{k^2}{a^2 + (b - \omega^2)^2/\omega^2} \quad (8)$$

وتحدث القيمة العظمى للدالة $|H|$ عند $b - \omega^2 = 0$ أو $\omega = \sqrt{b}$ والتي تسمى تردد المركز ω_0 . وعند تردد المركز يكون $|H(\omega_0)| = k/a$ و $|H|_{\max} = |H|$ ويكون تردد نصف القدرة عند ω_1 ، ω_2 حيث :

$$|H(\omega_1)|^2 = |H(\omega_2)|^2 = \frac{1}{2}|H(\omega_0)|^2 \quad (9a)$$

بتطبيق (8) فى (9a) نحصل على ω_1 ، ω_2 جئنا المعادلة التالية :

$$\frac{(b - \omega^2)^2}{\omega^4} = a^2 \quad (9b)$$

$$(9c) \quad \omega_1 = \sqrt{a^2/4 + b} - a/2 \quad \text{وبالحل}$$

$$(9d) \quad \omega_2 = \sqrt{a^2/4 + b} + a/2$$

من (9c) ، (9d) نحصل على :

$$\omega_2 - \omega_1 = a \quad \text{and} \quad \omega_1 \omega_2 = b = \omega_0^2 \quad (10b)$$

ويعرف عرض النطاق β بالعلاقة

$$\beta = \omega_2 - \omega_1 = a \quad (10c)$$

ويعرف معامل الجودة Q بالعلاقة

$$Q = \omega_0/\beta = \sqrt{b}/a \quad (10d)$$

ويقاس معامل الجودة حدة تجاوب التردد حول تردد المركز .

ويسمى هذا الأداء بالرنين (انظر البنود من 11-12 إلى 15-12) . وحينما يكون معامل الجودة مرتفعاً فإن ω_1 ، ω_2 يمكن أن يكونا بالتقريب $\omega_0 - \beta/2$ ، $\omega_0 + \beta/2$ على الترتيب .

مثال 12.7 : إذا اعتبرنا دالة الشبكة $H(s) = 10s / (s^2 + 300s + 10^6)$. أوجد تردد المركز وتردد نصف القدرة العلوى والسفلى وعرض النطاق ومعامل الجودة .

تردد نصف القدرة العلوى والسفلى على الترتيب هما :

$$\omega_1 = \sqrt{a^2/4 + b} - a/2 = \sqrt{300^2/4 + 10^6} - 300/2 = 861.2 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \sqrt{a^2/4 + b} + a/2 = \sqrt{300^2/4 + 10^6} + 300/2 = 1161.2 \text{ rad/s}$$

$$\beta = \omega_2 - \omega_1 = 1161.2 - 861.2 = 300 \text{ rad/s}$$

$$Q = 1000 / 300 = 3.3$$

مثال 12.8 : أعد حل مثال 7-12 بقيمة $H(s) = 10s / (s^2 + 30s + 10^6)$ وأيضاً العلاقة

$$\omega = 1000 \text{ rad/s} , \quad \omega_0^2 = 10^6$$

وبالتالى

$$\omega_1 = \sqrt{30^2/4 + 10^6} - 30/2 = 985.1 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \sqrt{30^2/4 + 10^6} + 30/2 = 1015.1 \text{ rad/s}$$

$$\beta = a = 30 \text{ rad/s} \quad \text{and} \quad Q = 1000/30 = 33.3$$

لاحظ أن ω_R ، ω_h يمكن تقريبها بنسبة جيدة من الدقة .

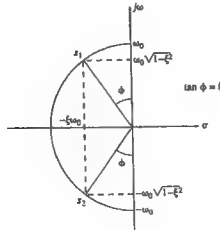
$$\omega_1 = \omega_0 - \beta/2 = 1000 - 30/2 = 985 \text{ rad/s} \quad \text{and} \quad \omega_2 = \omega_0 + \beta/2 = 1000 + 30/2 = 1015 \text{ rad/s}$$

12.10 التردد الطبيعي ونسبة الخمد

يمكن كتابة مقام دالة إمرار النطاق والمعطاه في (7) بالتالى :

$$s^2 + as + b = s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$$

حيث $\omega_0 = \sqrt{b}$ وهى تسمى التردد الطبيعي ، $\xi = a/2\sqrt{b}$ تسمى نسبة الخمد . وحينما تكون $\xi > 1$ فإنه يكون للدائرة قطبان محددان فى الاتجاه السالب لمحور القيم الحقيقية وتسمى خمد زائد . وعندما تكون $\xi = 1$ فإن الدائرة يكون لها قطب حقيقى من الرتبة الأولى عند $-\omega_0$ وتسمى الخمد الحرج . ولقيمته $\xi < 1$ فإنه يكون للدائرة زوج من الأقطاب المترافقة عند $-\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ ، ويكون موضع القطبين متماثل حول النصف الأيسر لمحيط دائرة نصف قطرها ω_0 . وتكون زاوية الإزاحة للقطبين هى $\phi = \tan^{-1}\xi$ (انظر شكل 17-17) وتكون الدائرة ذات خمد ناقص ويمكن أن تحتوى على تذبذبات متناقصة . ونلاحظ أن نسبة الخمد تكون مساوية لنصف مقلوب معامل الجودة .



شكل 17-12

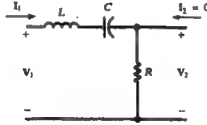
12-11 دائرة التوالي RLC ورنين التوالي

دائرة RLC مبنية شكل 12-18 لها في حالة الدائرة المفتوحة معاوقة دخل كالتالى :

$$Z_{in}(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

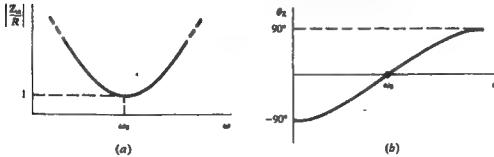
ويقال للدائرة أنها في حالة رنين توالى (أورنين المعاوقة المنخفضة) حيث يكون $Z_{in}(\omega)$ تكون حقيقية (وكذلك $|Z_{in}(\omega)|$ قيمة صغرى) أى أنه حينما

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \text{or} \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



شكل 12-18

شكل 12-19 يبين تعاقب التردد. وتناسب عكسياً الممانعة السعوية مع ω وتكون كبيرة عن الترددات المنخفضة بينما تتناسب طردياً الممانعة الحثية مع ω فهي تزداد بزيادة التردد. وبالتالي فإن محصلة الممانعة عند ترددات أقل من ω_0 تكون سعوية والزوايا على Z_{in} سالبة. وعند ترددات أعلى من ω_0 تكون الدائرة حثية وتكون زاوية Z_{in} موجبة.

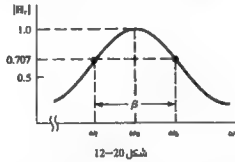


شكل 12-19

بتقسيم الجهد فإن دالة تحويل الجهد لشكل 12-18 تكون :

$$H_{v, \omega}(\omega) = \frac{R}{Z_{in}(\omega)} = RY_{in}(\omega)$$

ورسم تجاوب التردد (بالقيم فقط) واضح في شكل 12-20 والمنحنى هو بالضبط معكوس المرسوم في شكل 12-19(a) ولاحظ أنه يحدث الإيقاف عند قيم أقل وأعلى من تردد الرنين للتوالي ω_0 . وتكون النقط حيث تصل قيمة التجاوب إلى 0.707 وهي نقط نصف القدرة (بند 2-13) عند الترددين ω_1 ، ω_2 ويكون عرض النطاق هو عرض المسافة بين هذين الترددين $\beta = \omega_2 - \omega_1$.



شكل 12-20

يمكن تعريف معامل الجودة $Q_0 = \omega_0 L / R$ لدائرة التوالي بالقيمة السابقة عند الرنين (انظر بند 12-12 للتعريف العام لقيمة Q) . ويمكن التعبير عن ترددات نصف القدرة بدلالة عناصر الدائرة أو بدلالة Q_0 ، ω_0 كالآتي :

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_0 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}} + \frac{1}{2Q_0} \right)$$

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_0 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}} - \frac{1}{2Q_0} \right)$$

انظر المسألة 12-5 وبالطرح تصل إلى :

$$\beta = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

والتي تبين أنه كلما كانت الجودة أعلى كلما كان عرض النطاق أضيق .

12.12 معامل الجودة

معامل الجودة أو ميزة الشكل يمكن أن يحدد لأي مركبة أو للدائرة كلها . وهو يعرف بالتالى :

$$Q = 2\pi \left(\frac{\text{maximum energy stored}}{\text{energy dissipated per cycle}} \right)$$

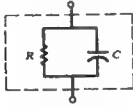
وهى مقدار بدون وحدات . هذا التعريف متفق مع التعريفات المعطاه فى بندى 9-12 ، 11-12 . وفى الملف العملى الذى يحتوى على كلا المقاومة والحث يمكن تمثيله فى شكل 12-12 وتكون القيمة العظمى للطاقة المخزنة هى $LI_{\max}^2 (1/2)$ بينما تكون الطاقة المستهلكة كلذببة الواحدة .

$$(I_{\text{eff}}^2 R) \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) = \frac{I_{\max}^2 R \pi}{\omega}$$

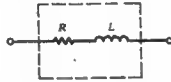
Hence,

$$Q_{\text{ind}} = \frac{\omega L}{R}$$

ويمكن تمثيل المكثف العملى بمجموعة توازى من R ، C ، كما هو مبين شكل 12-22 وتكون الطاقة العظمى المخزنة هما $CV_{\max}^2 (1/2)$ والطاقة المستهلكة فى اللذببة الواحدة $V_{\max}^2 \pi / R \omega$ وبذلك $Q_{\text{cap}} = \omega CR$.



شكل 12-22



شكل 12-21

ونستنتج قيمة Q فى دائرة التوالى RLC من المسألة 6(a)-12 . وهى تستخدم غالباً فى حالة الرنين التى تكون لها القيمة المكافئة .

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

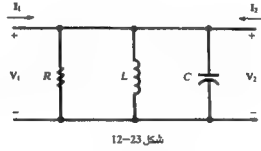
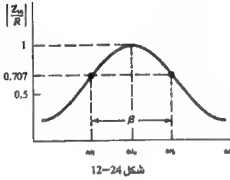
12.13 دائرة التوازي RLC - رنين التوازي

شبكة التوازي RLC مبينة شكل 12-23 لاحظ أن $V_2 = V_1$ وتكون مسامحة الدخل في حالة الدائرة المفتوحة .

$$Y_{in}(\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{Z_{in}(\omega)}$$

وستكون الشبكة في حالة رنين توازي (أو رنين المعاوقة الكبيرة) حينما $Y_{in}(\omega)$ وبالتالي $Z_{in}(\omega)$ حقيقية (وكذلك $|Y_{in}(\omega)|$ تكون قيمة صغرى ، $|Z_{in}(\omega)|$ تكون قيمة عظمى أى أنه حينما :

$$-\frac{1}{\omega L} + \omega C = 0 \quad \text{or} \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



الرمز ω_0 يستخدم الآن للتعبير عن الكمية $1/\sqrt{LC}$ لكي تميز الرنين من حالة رنين المعاوقة المنخفض ويمكن أن تحتوى شبكات التوازي المركبة على عدة ترددات رنين للمعاوقة المرتفعة ω_0 وعدة ترددات رنين للمعاوقة المنخفضة ω_0 .

والشكل العام لمعاوقة الدخل :

$$\frac{Z_{in}(\omega)}{R} = \frac{1}{1 + jR\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

قد رسمت (بالقيم فقط) في شكل 12-24 وترددات نصف القدرة ω_1 ، ω_2 مبيتان على الرسم وبالمثل لرنين التوازي فإن عرض النطاق يعطى بالعلاقة :

$$\beta = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

حيث Q_0 وهى معامل الجودة لدائرة التوازي عند $\omega = \omega_0$ لها التعريف المكافئ التالى :

$$Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

انظر المسألة 12-16(b).

12.14 دائرة التوازي LC العملية

تستخدم غالباً دائرة التوازي LC فى الدائرة الالكترونية كدائرة تنعيم أو نبيلة اختبار التردد. وبينما يستخدم المكثف غالباً ويعامل كما لو كان عنصر سعوى خالص فإنه باستخدام الملف لا بد من اعتبار ما فيه من مفايد وتمثيل هذه العملية (المحتوية على LC توازي) مبين شكل 12-25 وتكون مسامحة الدخول :

$$Y_{in}(\omega) = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]$$

وللرنين

$$\omega_0 C = \frac{\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} \quad \text{or} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}$$

وعند تردد الرنين $Y_{in}(\omega) = RC/L$ ومن بند 12-11 فإن قيمة Q للعنصر الحثى تكون :

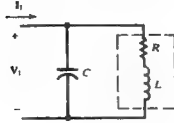
$$Q_{ind} = \frac{\omega_0 L}{R} = \sqrt{\frac{L}{CR^2} - 1}$$

إذا كان $\omega_0 \approx 1/\sqrt{LC}$.

$$\left| \frac{Z_{in}(\omega_0)}{R} \right| \approx Q_{ind}^2$$

تجاوب التردد يكون مشابهاً لحالة دائرة التوازي RLC فيما عد أن رنين المعاوقة العالية يحدث عند ترددات منخفضة لقيم Q_{ind} المنخفضة وهذا يصبح صحيحاً حينما نكتب ω_0 المذكورة كالتالى :

$$\omega_n = \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + (1/Q_{ind}^2)}}$$



شكل 12-25

12.15 تحويلات دوائر التوالي والتوازي

إنه من المناسب في بعض الأحيان عند تحليل الدوائر أن نحول دائرة التوالي RL إلى شكل التوازي (انظر شكل 12-26). فإذا كان لدينا R_s ، L_s والتردد المستخدم ω فإن قيم العناصر R_p ، L_p المكافئة لدائرة التوازي تحدد بمساواة المسامحتين .

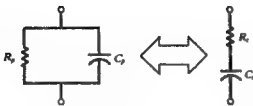
$$Y_s = \frac{R_s - j\omega L_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} \quad \text{and} \quad Y_p = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p}$$

وبالتالي تكون النتائج :

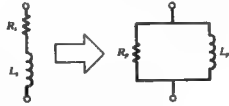
$$R_p = R_s \left[1 + \left(\frac{\omega L_s}{R_s} \right)^2 \right] = R_s (1 + Q_s^2)$$

$$L_p = L_s \left[1 + \left(\frac{R_s}{\omega L_s} \right)^2 \right] = L_s \left(1 + \frac{1}{Q_s^2} \right)$$

إذا كان $Q \geq 10$ ، $R_p \approx R_s Q_s^2$ ، $L_p \approx L_s$.



شكل 12-27



شكل 12-26

وهناك بعض الحالات التي تستخدم فيها دائرة RC في كلا الشكلين التوالى والتوازي (انظر شكل 12-27) وبمساواة إما المعاوقات أو المسامحات فإننا نحصل على :

$$R_s = \frac{R_p}{1 + (\omega C_p R_p)^2} = \frac{R_p}{1 + Q_p^2}$$

$$C_s = C_p \left[1 + \frac{1}{(\omega C_p R_p)^2} \right] = C_p \left(1 + \frac{1}{Q_p^2} \right)$$

وذلك للتحويل من التوازي إلى التوالى وإيضاً :

$$R_p = R_s \left[1 + \frac{1}{(\omega C_s R_s)^2} \right] = R_s (1 + Q_s^2)$$

$$C_p = \frac{C_s}{1 + (\omega C_s R_s)^2} = \frac{C_s}{1 + (1/Q_s)^2}$$

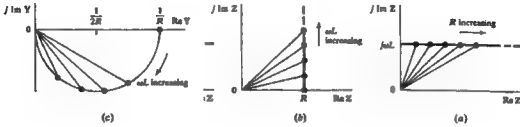
وذلك للتحويل من التوالى إلى التوازي وبالتالي فإن عملية التكافى تعتمد على التردد المستخدم .

12.16 أشكال المحل الهندسى

وجدنا من السابق تجاوب التردد والشبكة وذلك برسم كلاً من القيمة والزاوية منفصلين لدالة شبكة مناسبة بالنسبة للتردد ω . ونفس هذه المعلومة يمكن تقديمها في شكل واحد حيث توجد المنحنى (شكل المحل الهندسى) فى المستوى المركب مرسوماً بالنقطة التى تمثل دالة الشبكة حينما تتغير ω من 0 إلى ∞ . وسنناقش فى هذا البند أشكال المحل الهندسى لمعاوقة الدخلى ومسامحة الدخلى وفى بعض الحالات سيكون المتغير ليس ω ولكنه عامل آخر (مثل المقاومة R) .

فى دائرة التوالى RL شكل 12-28(a) يبدو محل هندسى Z- حينما ωL تكون ثابتة ويكون R متغيراً ويبين شكل 12-28(c) محل هندسى Y- حينما تكون R ثابتة و ωL أو ω متغيرة . والمحل الهندسى الأخير هذا نحصل عليه من العلاقة :

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \angle \tan^{-1}(-\omega L/R)$$



شكل 12-28

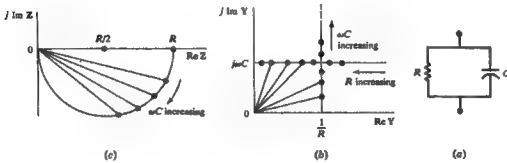
لاحظ

$$Y = \frac{1}{R\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

ويرسم بعض النقاط الأخرى يتأكد شكل نصف الدائرة للمحل الهندسي بالمركز عند $1/2R$ ونصف القطر $1/2R$. ويعطى أيضاً من الشكلين (b) 12-29، (c) 12-28 تحابوب التردد للدائرة.

وللدائرة التوازي RC لها المحلان الهندسيان Y ، Z المئين شكل 12-29 وهي مستتجة من:

$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C \quad \text{and} \quad Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \angle \tan^{-1}(-\omega CR)$$



شكل 12-29

وللدائرة التوالي RLC فإن المحل الهندسي Y مع ω متغيرة يمكن تحديدها بكتابة:

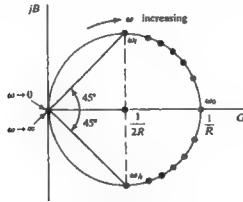
$$Y = G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2} \quad \text{لذلك}$$

وتعتمد كلًا من G ، B على علاقة مع X ويحذف X من كلا التعبيران نحصل على معادلة المحل الهندسى بالشكل :

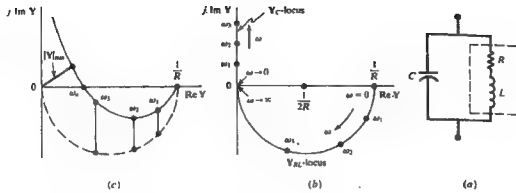
$$G^2 + B^2 = \frac{G}{R} \quad \text{or} \quad \left(G - \frac{1}{2R}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R}\right)^2$$

أى الدائرة شكل 12-30 . لاحظ أن النقط متساوية القيمة $\omega_1 = \omega_0$ ، $\omega = \omega_0$ ، $\omega = \omega_1$.



شكل 12-30

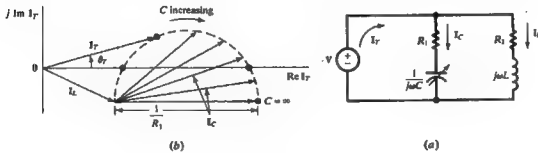
وللدائرة العملية التى درست بند 12-14 فإه يمكن إنشاء محل هندسى Y بتجميع المحل الهندسى لفرع C ولفرع RL . وليبان الجمع فإنه يتم وضع علامة على النقط الخاصة للترددات $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ على كل محل هندسى على حده وأيضاً على المحل الهندسى للمجموع كمايبين شكل (c) 12-31 . ويبدو أن $|Y|_{\min}$ تحدث عند تردد أكبر من ω_0 أى أن الرنين يكون معاوقة مرتفعة ولكنه لا يكون القيمة العظمى للممانعة . والسبب فى ذلك أن G يتغير مع ω (انظر بند 12-14) ويتغير بطريقة بحيث أنه عند $B = 0$ فإن ذلك لا يسبب وصول قيمة $G^2 + B^2$ تلقائياً إلى القيمة الصغرى . والتفرقة بين الرنين وترددات المسامحة الصغرى محكومة بقيمة Q للملف . وكلما كانت Q_{ind} كبيرة فإن ذلك يؤول إلى قيم أصغر فى R . ويبدو من شكل (b) 12-31 أن القيم الصغيرة فى R يؤدى إلى نصف دائرة أكبر والذي عند تجميعه مع محل هندسى Y_C يعطى قيم أكبر فى ω_0 وأصغر لتردد المسامحة الصغرى حينما $Q_{ind} \geq 10$ فإن كلا الترددان يمكن اعتبارهما متطابقان .



شكل 12-31

يمكن اختيار حالة الدائرة ذات الفرعين RC ، RL المبينة شكل (a) 12-32 بجمع المحل الهندسى للمسامحة للفرعين . وإذا كانت $V = V/0^\circ$ ثابتة فهذا يعنى جمع المحلين الهندسيين لتياري الفرعين . وإذا اعتبرنا تغير لقيمة C بدون حدود وكلأ من R_1 ، R_2 ، ω ثوابت فإن التيار I_L يكون ثابتاً كما فى شكل 12-32(b) والمحل الهندسى لنصف الدائرة للتيار I_C يضاف إلى I_L لينتج المحل الهندسى للتيار I_T .

ويؤول رنين الدائرة لقيمة $\theta_T = 0$. وقد يحدث هذا لقيمتين للمعامل C الحقيقى الموجب [وهذه الحالة مبينة شكل 12-32(b)] لقيمة واحدة وأيضاً ليس لأى قيمة وذلك يعتمد على عدد الجذور الحقيقية الموجبة للمعادلة $I_m Y_T(C) = 0$.



شكل 12-31

مسائل محلولة

12.1 في الشبكة ذات الجهدين المبينة شكل 12-33 : $R_1 = 7 \text{ k}\Omega$ ، $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$ أوجد نسبة الجهد

V_2/V_1 . (أ) عند عدم الحمل . (ب) عند $R_L = 20 \text{ k}\Omega$.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3}{7 + 3} = 0.30$$

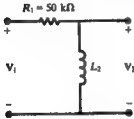
(أ) مع $R_L = 20 \text{ k}\Omega$

$$R_p = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} = \frac{60}{23} \text{ k}\Omega$$

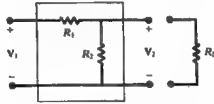
and

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_p}{R_1 + R_p} = \frac{60}{221} = 0.27$$

نسبة الجهد لا تعتمد على التردد . وقد خفض الحمل $20 \text{ k}\Omega$ النسبة من 0.30 إلى 0.27



شكل 12-34



شكل 12-33

12.2 (أ) أوجد L_2 في دائرة الإمرار العالي المبينة شكل 12-24 إذا كان $|H_v(\omega)| = 0.50$ عند

1.50 MHz . (ب) عند أي تردد يكون $|H_v| = 0.90$ ؟

(أ) من بند 12-2 مع $R_1 / L_2 = \omega$.

$$|H_v(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_c/\omega)^2}}$$

Then,

$$0.50 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_c/50)^2}} \quad \text{or} \quad f_c = 50\sqrt{3} \text{ MHz}$$

and

$$L_2 = \frac{R_1}{2\pi f_c} = \frac{50 \times 10^3}{2\pi(50\sqrt{3} \times 10^6)} = 91.9 \text{ } \mu\text{H}$$

$$0.90 = \frac{1}{1 + (50\sqrt{3}/f)^2} \quad \text{or} \quad f = 179 \text{ MHz} \quad (\text{ب})$$

12.3 يمكن عمل مقسم الجهد المستخدم للترددات العالية بمكثفين C_1 ، C_2 في الشبكة ذات الجهدين الميئة شكل 12-12 في حالة الدائرة المفتوحة أوجد C_2 إذا كان $C_1 = 0.01 \mu F$ ، $|H| = 0.20$.

من جدول 12-1

$$H_v = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1/j\omega C_2}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

$$0.20 = \frac{0.01}{0.01 + C_2} \quad \text{or} \quad C_2 = 0.04 \mu F \quad \text{ولذلك}$$

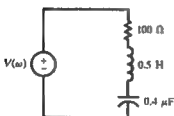
ويبدو أن نسبة الجهد لا تتوقف على التردد في حالة الدائرة المفتوحة .

12.4 أوجد التردد الذي عنده $|H_v| = 0.50$ لشبكة RC ذات الإمرار المنخفض الميئة شكل 12-35 .

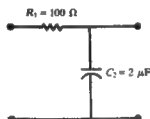
$$H_v(\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_c)} \quad \text{where} \quad \omega_c = \frac{1}{R_1 C_2}$$

Then, $(0.50)^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^2}$ from which $\frac{\omega}{\omega_c} = \sqrt{3}$

and $\omega = \sqrt{3} \left(\frac{1}{R_1 C_2} \right) = 8660 \text{ rad/s}$ or $f = 1378 \text{ Hz}$



شكل 12-36



شكل 12-35

12.5 لدائرة التوالي RLC الميئة شكل 12-36 أوجد تردد الرنين $\omega_0 = 2\pi f_0$. أوجد أيضاً ترددات نصف القدرة وعرض النطاق β .

$$Z_{in}(\omega) = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

عند الرنين $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ، $Z_{in}(\omega) = R$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0.5(0.4 \times 10^{-6})}} = 2236.1 \text{ rad/s} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 355.9 \text{ Hz}$$

وعلاقة القدرة

$$P = I_{\text{eff}}^2 R = \frac{V_{\text{eff}}^2 R}{|Z_{\text{in}}|^2}$$

تبين أن $P_{\text{max}} = V_{\text{eff}}^2 / R$ تحدث عند $\omega = \omega_0$ وأن $P = (1/2)P_{\text{max}}$ عند $|Z_{\text{in}}|^2 = 2R^2$ أي أنه عند .

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R \quad \text{or} \quad \omega^2 \mp \frac{R}{L} \omega - \frac{1}{LC} = 0$$

وباعتبار الإشارة العليا فإنه يوجد جذر واحد حقيقي موجب .

$$\omega_+ = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = 2338.3 \text{ rad/s} \quad \text{or} \quad f_+ = 372.1 \text{ Hz}$$

وبالنسبة للإشارة السفلى يكون الجذر الوحيد الموجب .

$$\omega_- = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = 2138.3 \text{ rad/s} \quad \text{or} \quad f_- = 340.3 \text{ Hz}$$

12.6 استنتج قيمة Q في حالة (أ) دائرة توالى RLC . (ب) دائرة توالى RLC .

(أ) تعطى الطاقة اللحظية المختزنة في مجال الزمن بالقيمة :

$$W_t = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{q^2}{2C}$$

وبالنسبة للقيمة العظمى .

$$\frac{dW_t}{dt} = L i \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = i \left(L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \right) = i(v_L + v_C) = 0$$

وبذلك فإن القيمة العظمى للطاقة المختزنة وهي W_s عند $i = 0$ أو عند $v_L + v_C = 0$ أيهما تكون أكبر . والآن فإن جهد المكثف وبالتالي الشحنة يتأخر التيار بزاوية 90° وبالتالي $i = 0$ تعطى $q = \pm Q_{\text{max}}$

$$W_{t|_{i=0}} = \frac{Q_{\text{max}}^2}{2C} = \frac{1}{2} C V_{\text{Cmax}}^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{I_{\text{max}}}{\omega C} \right)^2 = \frac{I_{\text{max}}^2}{2C\omega^2}$$

ومن ناحية أخرى عندما $v_L + v_C = 0$ تؤدي إلى $v_L = v_C$ ، التيار $i = \pm I_{\max}$ (انظر شكل المتجهات 12-37) أى أن:

$$W_i|_{v_L+v_C=0} = \frac{1}{2} L I_{\max}^2$$

وهذا يؤدي إلى:

$$W_{\max} = \begin{cases} I_{\max}^2 / 2 C \omega^2 & (\omega \leq \omega_0) \\ L I_{\max}^2 / 2 & (\omega \geq \omega_0) \end{cases}$$

الطاقة المستهلكة لكل ذبذبة (فى المقاومة) هي $W_d = I_{\max}^2 R \pi / \omega$. وبالتالي:

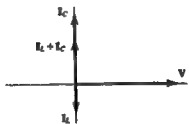
$$Q = 2\pi \frac{W_{\max}}{W_d} = \begin{cases} 1 / \omega C R & (\omega \leq \omega_0) \\ \omega L / R & (\omega \geq \omega_0) \end{cases}$$

(ب) مع مجموعة التوازي باستخدام الجهد $v(t)$.

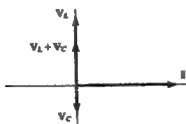
$$W_s = \frac{1}{2} L i_L^2 + \frac{1}{2C} q_C^2$$

and

$$\frac{dW}{dt} = L i_L \frac{di_L}{dt} + \frac{q_C}{C} i_C = v(i_L + i_C) = 0$$



شكل 12-38



شكل 12-37

If $v = 0$, then $q_C = 0$ and

$$i_L = \pm I_{\max} = \pm \frac{V_{\max}}{\omega L}$$

giving

$$W_i|_{v=0} = \frac{V_{\max}^2}{2L\omega^2}$$

إذا كان $i_C + i_L = 0$ فإنه (انظر شكل 12-28) $i_L = i_C = 0$ ، $q_C = \pm CV_{\max}$ ،

$$W_{i_L + i_C = 0} = \frac{1}{2} CV_{\max}^2$$

Therefore,

$$W_{\max} = \begin{cases} V_{\max}^2 / 2L\omega^2 & (\omega \leq \omega_0) \\ CV_{\max}^2 / 2 & (\omega \geq \omega_0) \end{cases}$$

والطاقة المستهلكة لكل ذبذبة في R هي $W_d = V^2 \pi / R \omega$ وبالتالي :

$$Q = 2\pi \frac{W_{\max}}{W_d} = \begin{cases} R/L\omega & (\omega \leq \omega_0) \\ \omega CR & (\omega \geq \omega_0) \end{cases}$$

12.7 دائرة توالي ذات ثلاث عناصر هي $R = 10 \Omega$ ، $L = 5 \text{ mH}$ ، $C = 175 \mu\text{F}$. ارسم قيم وزاوية

Z كدالة في ω لقيم ω من $0.8 \omega_0$ إلى $1.2 \omega_0$.

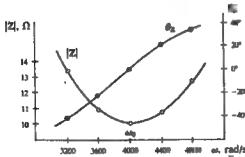
$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 4000 \text{ rad/s. At } \omega_0,$$

$$X_L = (4000)(5 \times 10^{-3}) = 20 \Omega \quad X_C = \frac{1}{(4000)(175 \times 10^{-6})} = 20 \Omega$$

$$Z = 10 + j(X_L - X_C) = 10 + j0 \Omega$$

يمكن الحصول بسهولة على قيم الممانعات عند الترددات الأخرى . وبيان جدول ورسم

للممانعات والمعاوقات في شكل (a) 12-39(a) ، (b) 12-39(b) .



(b)

ω	X_L	X_C	Z
3200	16	25	$10 - j9$ $18.4 / -42^\circ$
3600	18	22.2	$10 - j4.2$ $10.8 / -22.8^\circ$
4000	20	20	10 $10 / 0^\circ$
4400	22	18.2	$10 + j3.8$ $10.7 / 20.8^\circ$
4800	24	16.7	$10 + j7.3$ $12.4 / 36.2^\circ$

(a)

شكل 12-39

12.8 للمائرة التوالي RLC بين أن $\omega_0 = \sqrt{\omega_L \omega_H}$

من نتائج المسألة 12.5 .

$$\omega_1 \omega_2 = \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} - \frac{R}{2L} \right) \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} + \frac{R}{2L} \right) = \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

12.9 احسب معامل الجودة لدائرة التوالي RLC التي بها $R = 20 \Omega$ ، $L = 50 \text{ mH}$ ، $C = 1 \mu\text{F}$

باعتبار (أ) $Q = \omega_0 L/R$ ، (ب) $Q = 1/\omega_0 CR$ ، (ج) $Q = \omega_0/\beta$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0.05 \times 10^{-6}}} = 4472 \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = 4276.6 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = 4676.6 \text{ rad/s}$$

and $\beta = \omega_2 - \omega_1 = 400 \text{ rad/s}$.

$$(a) \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{4472(0.050)}{20} = 11.2$$

$$(b) \quad Q = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{4472(10^{-6})20} = 11.2$$

$$(c) \quad Q = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{4472}{400} = 11.2$$

12.10 مثل ملف بدائرة مكونة من $R = 15 \Omega$ ، $L = 50 \text{ mH}$. احسب معامل الجودة عند (أ)

10 KHz ، (ب) 50 KHz

$$(a) \quad Q_{\text{coil}} = \frac{\omega L}{R} = \frac{2\pi(10 \times 10^3)(50 \times 10^{-3})}{15} = 209$$

$$(b) \quad Q_{\text{coil}} = 209 \left(\frac{50}{10} \right) = 1047$$

12.11 حول ثوابت الدائرة في المسألة 10-12 إلى شكل التوازي (أ) عند 10 Hz ، (ب) عند 250 Hz .

$$(a) \quad R_p = R_s \left[1 + \left(\frac{\omega L_s}{R_s} \right)^2 \right] = R_s [1 + Q_s^2] = 15[1 + (209)^2] = 655 \text{ k}\Omega$$

or, since $Q_s \gg 10$, $R_p \approx R_s Q_s^2 = 15(209)^2 = 655 \text{ k}\Omega$.

$$L_p = L_s \left(1 + \frac{1}{Q_s^2} \right) \approx L_s = 50 \text{ mH}$$

At 250 Hz,

(ب)

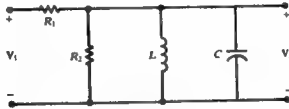
$$Q_s = \frac{2\pi(250)(50 \times 10^{-3})}{15} = 5.24$$

$$R_p = R_s[1 + Q_s^2] = 15[1 + (5.24)^2] = 426.9 \Omega$$

$$L_p = L_s \left[1 + \frac{1}{Q_s^2} \right] = (50 \times 10^{-3}) \left[1 + \frac{1}{(5.24)^2} \right] = 51.8 \text{ mH}$$

يمكن عمل تحويل عناصر الدائرة من التوالى إلى التوازي عند تردد محور فإن ذلك لا يصلح لتردد آخر. لاحظ أنه في (ب) حينما تكون $Q_s < 10$ فإن L_p يختلف عن L_s .

12.12 للدائرة المبينة شكل 12-40 (أ) أوجد دالة تحويل الجهد $H_v(\omega)$ ، (ب) أوجد التردد الذى عنده تكون الدالة حقيقية .



شكل 12-40

(أ) ضع Z_2 ، Y_2 لتمثل المعاوقة والمسامحة لدائرة التوازي المغلقة R_2LC .

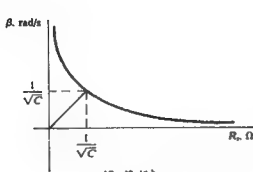
$$H_v(\omega) = \frac{Z_2}{R_1 + Z_2} = \frac{1}{1 + R_1 Y_2} = \frac{1}{1 + R_1 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + jR_1 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}$$

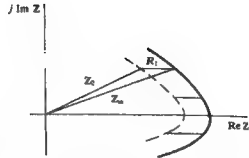
(ب) تكون دالة التحويل موجبة حينما يكون Y_2 حقيقية أى أنه عند

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

عند $\omega = \omega_0$ فإنه ليس فقط $|Z_2|$ ، $|H_v|$ قيمة عظمى ولكن أيضاً $|Z_{in}| = |R + Z_2|$ تكون قيمة عظمى (لأن R_1 حقيقية وموجبة - انظر شكل المحل الهندسى شكل 12-41).



شكل 12-42



شكل 12-41

12.13 أوجد عرض النطاق β للدائرة المبينة شكل 12-40 وارسم β مع المعامل

$$R_s = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

هنا نحدد ترددات نصف القدرة بالحالة $|H_v(\omega)| = 0.707 |H_v|_{\max}$ من المسألة 12-12.

$$R_1 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \pm \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \quad \text{or} \quad R_s \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \pm 1$$

ولكن (بالرجوع إلى بند 12-13) نجد أنها نفس المعادلة لترددات نصف القدرة لدائرة توازي

لذلك R_s LC :

$$\beta = \frac{\omega_s}{Q_s} = \frac{1}{CR_s}$$

ورسم القطع الزائد مبين في شكل 12-42.

12.14 في دائرة شكل 12-40 ضع $C = 40 \text{ nF}$ ، $L = 10 \text{ mH}$ ، $R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega$. أوجد تردد

الرنين وعرض النطاق وقارن بالنتائج لقيمة $R_1 = 0$ (أي دائرة توازي خالصة).

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{(10 \times 10^{-3})(40 \times 10^{-9})}} = 5 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

$$\text{أو } F_s = 7988 \text{ Hz مع } F_s = 2^2/4 = 1 \text{ k}\Omega \text{ والمسألة 12-13 تعطى :}$$

$$\beta = \frac{1}{(40 \times 10^{-9})(1 \times 10^3)} = 2.5 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

لا يمكن استخدام النتائج في المسألة 12-12، 12-13 حينما $0 \rightarrow R$ لأن نسبة الجهد عند نهاية الحبلود تكون مطابقة للوحدة وبذلك لا يمكن تحقيق أى معلومات عن دائرة التوازي الباقية R_2LC (لاحظ أن $\beta \rightarrow \infty$ كلما $0 \rightarrow R_x$) وفيما عدا ذلك فإننا يجب أن نتعامل مع دالة معاوقة الدخل كما فى بند 12-13 حيث:

$$\omega_b = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

وكالسابق

$$\beta = \frac{1}{CR_2} = 1.25 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

12.15 للدائرة شكل 12-40، $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$ ، $C = 10 \text{ nF}$ ، فإذا كان $V_2/V_1 = 0.8$ عند 15 KHz احسب R_2 ، L وعرض النطاق.

تبين الزاوية صفر لنسبة الجهد H_0 أن الدائرة ككل وجزء التوازي نفسه فى حالة رنين (انظر المسألة 12-14) ومن ثم:

$$\omega_b = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad L = \frac{1}{\omega_b^2 C} = \frac{1}{[2\pi(15 \times 10^3)]^2 (10 \times 10^{-9})} = 11.26 \text{ mH}$$

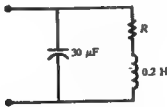
ومن المسألة 12-12.

$$H_0(\omega_b) = 0.8/0^\circ = \frac{1}{1 + (R_1/R_2)} \quad \text{whence} \quad R_2 = \frac{R_1}{0.25} = 20 \text{ k}\Omega$$

وبالتالى فإن $4 \text{ k}\Omega = 25 (20) = R_x$ وتمطى المسألة 12-3.

$$\beta = \frac{1}{(10 \times 10^{-9})(4 \times 10^3)} = 2.5 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

12.16 قارن تردد الرنين الدائرة المبينة شكل 12-43 حينما $R = 0$ حينما $R = 50 \Omega$.



شكل 12-43

حينما $R = 0$ تكون الدائرة ذات جزء توازي LC مع

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.2)(30 \times 10^{-6})}} = 408.2 \text{ rad/s} \quad \text{or} \quad f_0 = 65 \text{ Hz}$$

وحيثما $R = 50 \Omega$ فإن :

$$Y_{in} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]$$

وفي حالة الرنين فإن $\text{Im} Y_{in}$ يكون صفراً أى أن :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}$$

ومن الواضح أنه كلما $R \rightarrow 0$ فإن هذه القيمة تقل إلى القيمة للجزء LC الخاص وبالتعويض حسابياً فإن القيمة الجذرية تكون 0.791 وبذلك :

$$\omega_0 = 408.2(0.791) = 322.9 \text{ rad/s} \quad \text{or} \quad f_0 = 51.4 \text{ Hz}$$

12.17 عند قياس ملف عملى عند التردد 10 MHz وجد أن $L = 8.0 \mu\text{H}$ ، $Q_{ind} = 40$. (أ) أوجد قيمة المكثف المثالى C لرنين التوازي عند 10 MHz وأحسب عرض النطاق β المناظر لذلك . (ب) أعد الحل باستخدام مكثف عملى بمعامل تبديد $D = Q_{cap}^{-1} = 0.005$ عند 10 MHz بدلاً من المكثف المثالى .

(أ) من بند 12-14 .

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{\sqrt{1 + Q_{ind}^{-2}}}$$

$$\text{or} \quad C = \frac{1}{\omega_0^2 L (1 + Q_{ind}^{-2})} = \frac{1}{[2\pi(10 \times 10^6)]^2 (8.0 \times 10^{-4}) \left(1 + \frac{1}{1600}\right)} = 31.6 \text{ pF}$$

باستخدام بند 12-15 لتحويل فرع التوالى RL شكل 12-15 إلى توازي عند تردد الرنين فإن :

$$R_p = R(1 + Q_{ind}^2) = \frac{\omega_0 L}{Q_{ind}} (1 + Q_{ind}^2)$$

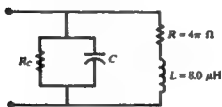
من بند 12-13 فإن :

$$\beta = \frac{\omega_c}{Q_s} = \frac{\omega_c^2 L}{R_p} = \frac{\omega_c Q_{ind}}{1 + Q_{ind}^2} = \frac{2\pi(10 \times 10^6)(40)}{1 + 1600} \text{ rad/s}$$

أو 0.25 MHz

(ب) من الدائرة المبينة شكل 12-44 فإن الجزء (a) يعطى مقاومة الملف العملى .

$$R = \frac{\omega_c L}{Q_{ind}} = 4\pi \Omega$$



شكل 12-44

وأيضاً نعلم من معامل التبديد أن :

$$\frac{1}{\omega_c C R_C} = 0.005$$

مسامحة الدخل هي :

$$Y_{in} = \frac{1}{R_C} + j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \left[\frac{1}{R_C} + \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} \right] + j \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]$$

والتي تختلف من مسامحة الدخل فى الجزء (أ) فى الجزء الحقيقى فقط . وحيث أن الجزء التخيلى يحتوى نفس R ، L ، ويجب أن يتلاشى عند نفس التردد فإن C يجب أن تكون نفسها كما فى (أ) وبالتالى $C = 31.6 \text{ PF}$.

وعند ثبوت قيمة C فإن عرض النطاق يتناسب عكسياً مع المقاومة . ومع المكثف العملى فإن مقاومة التوازي فى النهاية تكون :

$$R' = \frac{R_p R_C}{R_p + R_C}$$

حيث R_p كما حسب في الجزء (أ) وبذلك :

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{0.25 \text{ MHz}} &= \frac{R_p}{R^2} = 1 + \frac{R_p}{R_c} = 1 + \frac{(\omega_p L / Q_{ind})(1 + Q_{ind}^2)}{1 / \omega_p C (0.005)} \\ &= 1 + \frac{(1 + Q_{ind}^2)(0.005)}{Q_{ind}(1 + Q_{ind}^2)} \\ &= 1 + \frac{(1 + 1600)(0.005)}{40 \left(1 + \frac{1}{1600}\right)} = 1.2\end{aligned}$$

وبذلك $\beta = 0.30 \text{ MHz}$

ويكون المكثف ذو المقاومة له نفس تأثير أى حمل كمقاومة موضوع على طرفى جزء توازى، وتقل قيمة Q_0 بينما يزداد عرض النطاق فى حين أن f_n لا تتغير .

12.18 ملف ذو مقاومة فى تمثيل دائرة التوالى يحتوى على $R = 25 \Omega$ ، $C = 20 \text{ pF}$. أوجد تمثيل دائرة التوازى المكافئة عند 50 KHz .

من بند 12-15 أو بوضع $L \rightarrow 0$ فى المسألة (a) 12-6 .

$$Q_s = \frac{1}{\omega C_s R_s} = \frac{1}{2\pi(50 \times 10^3)(20 \times 10^{-12})(25)} = 6370$$

ولقيمة Q الكبيرة هذه فإن :

$$R_p \approx R_s Q_s^2 = 1010 \text{ M}\Omega \quad C_p = C_s = 20 \text{ pF}$$

12.19 منبع ذو تردد متغير به $V = 100 \angle 0^\circ$ وصل بدائرة توالى RL بها $R = 20 \Omega$ ، $L = 100 \text{ mH}$.

أحسب التيار I لقيم $\omega = 0, 500, 1000, 2000, 5000 \text{ rad/s}$. ارسم جميع التيارات على نفس شكل المتجهات وبين المحل الهندسى للتيارات .

$$Z = R + jX_L = R + j\omega L$$

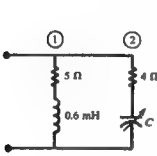
يبين جدول 12-2 جميع الحسابات . فعند زاوية متجه الجهد صفراً فإن تغير المحل الهندسى للتيار

مع تغير ω يكون نصف دائرة كالمبنية شكل 12-45 . وحيث أن $I = VY$ مع ثبوت القيمة V فإن

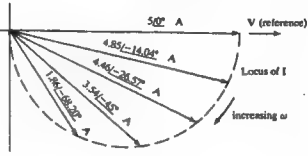
شكل 12-45 يكون أساساً مثل شكل 12-28(a) وهو المحل الهندسى للمسامحة لدائرة التوالى RL .

جدول 12-2

ω , rad/s	X_L , Ω	R , Ω	Z , Ω	I , A
0	0	20	$20/0^\circ$	$5/0^\circ$
500	5	20	$20.6/14.04^\circ$	$4.85/-14.04^\circ$
1000	10	20	$22.4/26.57^\circ$	$4.46/-26.57^\circ$
2000	20	20	$28.3/45^\circ$	$3.54/-45^\circ$
5000	50	20	$53.9/68.20^\circ$	$1.86/-68.20^\circ$



شكل 12-46



شكل 12-45

12.20 الدائرة المبينة شكل 12-46 في حالة رنين لقيمتين للمكثف C عندما يكون تردد المنبع 5000 rad/s. أوجد هاتين القيمتين للمكثف C وأنشأ شكل المحل الهندسي للمسامحة التي توضح هذه الحقيقة.

عند التردد المعطى $X_L = 3 \Omega$ وبذلك تكون مسامحة هذا الفرع الثابت هي:

$$Y_1 = \frac{1}{5 + j3} = 0.147 - j0.088 \text{ S}$$

المحل الهندسي النصف دائري للفرع 2 له نصف قطره $r = 1/2 R = 0.125 \text{ S}$ وتكون المسامحة الكلية هي مجموع المسامحة الثابتة Y_1 والمسامحة المتغيرة Y_2 وفي شكل 12-47 يضاف المحل الهندسي النصف دائري للرقم المركب الثابت Y_1 ويحدث رنين الدائرة عند النقطتين a، b حيث Y_T حقيقية.

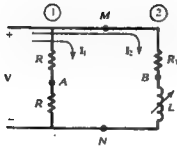
$$Y_T = 0.147 - j0.088 + \frac{1}{4 - jX_C}$$

والتي تكون حقيقية إذا كان.

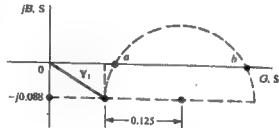
$$X_C^2 - 11.36X_C + 16 = 0$$

$$\omega = 5000 \text{ rad/s} \text{ مع } X_{C2} = 1.65 \Omega, X_{C1} = 9.71 \Omega \text{ أ.}$$

$$C_1 = 20.6 \mu F \quad C_2 = 121 \mu F$$



شكل 12-48



شكل 12-47

12.21 بين بأشكال المحل الهندسي أن قيمة الجهد بين النقط A ، B في شكل 12-48 تكون دائماً نصف قيمة جهد المتبع V كلما تغيرت L.

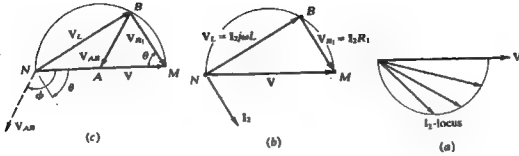
في الفرع 1 يمر التيار I1 خلال مقاومتين متساويتين R. وبذلك تكون A هي نقطة المنتصف للمتجه V كما هو مبين شكل 12-49.



شكل 12-49

الفرع 2 له محل هندسي نصف دائري Y [انظر شكل 12-28(c)] وبالتالي فإن المحل الهندسي للتبار يكون نصف دائري كما هو مبين شكل 12-50(a). ويتكون شكل متجهات الجهد شكل 12-50(b) من الجهد على طرفي الملف VBN والجهد على طرفي R1 ، VMB ويضاف الجهد إيجابياً.

$$V = V_{MN} = V_{BN} + V_{MB}$$



شكل 12-50

ولأن I_2 يتأخر عن V_{BN} بـ 90° فإن V_{MB} ، V_{BN} تكونان متعامدتان لجميع قيم L كما في شكل 12-56(b) وكلما تغيرت L من O إلى ∞ فإن النقطة B تتحرك من N إلى M على نصف الدائرة وشكلا 12-29 ، 12-50(b) مركبان على بعضهما في شكل 12-50(c) . ومن الواضح أن V_{AB} هي نصف نصف قطر الدائرة وبذلك :

$$|V_{AB}| = \frac{1}{2}|V|$$

وبالإضافة إلى ذلك فإن الزاوية Φ والتي بها يتأخر V_{AB} عن V تساوي 2θ حيث $\theta = \tan^{-1} \omega L/R$.

مسائل إضافية

12.22 دائرة إمرار مرتفع RL بها $R_1 = 50 \text{ k}\Omega$ ، $L_2 = 0.2 \text{ mH}$. أوجد ω إذا كانت قيمة دالة تحويل هي $0.90 = |H_{\text{pass}}|$ ، (ب) $R = 1 \text{ M}\Omega$ على طرفي L_2 . أوجد $|H_{\text{pass}}|$ عند $\omega = 7.5 \times 10^8 \text{ rad/s}$

(b) With a load $R = 1 \text{ M}\Omega$ across L_2 , find $|H_{\text{pass}}|$ at $\omega = 7.5 \times 10^8 \text{ rad/s}$.

الجواب: (a) $5.16 \times 10^8 \text{ rad/s}$; (b) 0.908

12.23 أوجد H_{pass} لدائرة إمرار مرتفع RL عند $\omega = 2.5\omega_0$ ، $R = 2 \text{ k}\Omega$ ، $L = 0.05 \text{ H}$.

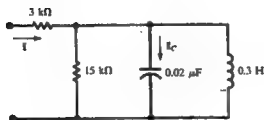
الجواب: $0.928 \angle 21.80^\circ$

12.24 دائرة إسمرار منخفض RC في حالة عدم الحمل فيها $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$. (أ) أوجد C_2 إذا كان $|H_0| = 0.5$ عند 10 kHz ، (ب) أوجد H_0 عند 5 kHz ، (ج) ما هي قيمة C_2 الناتجة إذا كان $|H_0| = 0.9$ عند 8 kHz (د) وأوجد قيمة جديدة للمقاومة R_1 ليصبح $|H_0| = 0.90$ عند 8 kHz إذا كان C_2 كما في (أ) .

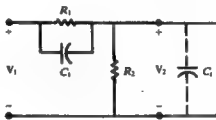
الجواب: (a) $5.51 \mu\text{F}$; (b) $0.756 / -40.89^\circ$; (c) $1.93 \mu\text{F}$; (d) 1749Ω

12.25 مقسم جهد بسيط مكون من R_1 ، R_2 . وفي وجود سعة شاردة C_2 فإن المقسم سيعتمد على التردد . بين أن قيمة V_2/V_1 لا تعتمد على التردد في الدائرة شكل 12-51 إذا كان مكثف التعويض C_1 له قيمة معينة .

الجواب: $C_1 = (R_2/R_1) C_2$.



شكل 12-52



شكل 12-51

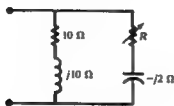
12.26 افترض أن جهداً جيبياً لمنع ذو تردد متغير والجهد $V_{\max} = 50 \text{ V}$ تم توصيله للدائرة المبينة شكل 12-52 . (أ) عند أي تردد f يكون $|H|$ قيمة صغيرة . (ب) أحسب هذه القيمة الصغرى للتيار . (ج) ما هي قيمة $|H|$ عند هذا التردد؟

الجواب: (أ) 2.05 kHz ، (ب) 2.78 mA ، (ج) 10.8 mA

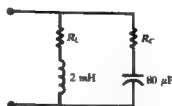
12.27 وصل مكثف $20 \mu\text{F}$ على التوازي مع ملف عملي ممثلاً بالقيم $L = 1 \text{ mH}$ ، على التوالي مع $R = 7 \Omega$ أوجد تردد الرنين بوحدة rad/s وبوحدة Hz لدائرة التوازي .

الجواب: 159.2 Hz ، 1000 rad/s

12.28 ما هي العلاقة بين قيمتي R_C ، R_L إذا كانت الشبكة المبينة في شكل 12-53 في حالة رنين عند جميع الترددات . الجواب : $R_L = R_C = 5 \Omega$.



شكل 12-54

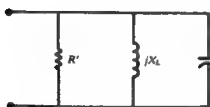


شكل 12-53

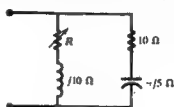
12.29 لشبكة التوازي المبينة شكل 12-54 (أ) أوجد قيم R عند الرنين ، (ب) حول الفرع RC لمكافئ التوازي . الجواب : (أ) 6.0Ω ، (ب) $X_{Cp} = 20 \Omega$ ، $R_p = 6.67 \Omega$.

12.30 للشبكة المبينة في شكل 12-55(a) أوجد قيم R في حالة الرنين . أوجد قيم X_C ، X_L ، R' دائرة التوازي المكافئة لشكل 12-55(b) .

الجواب : $R = 12.55 \Omega$ ، $R' = 7.75 \Omega$ ، $X_L = 25 \Omega$ ، $X_C = 25 \Omega$.



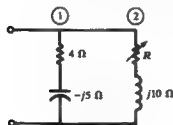
(b)



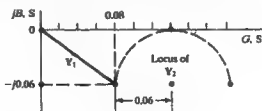
(a)

شكل 12-55

12.31 الفرع 1 لدائرة توازي ذات فرعين له المعاوقة $Z_1 = 8 + j6 \Omega$ عند $\omega = 5000 \text{ rad/s}$ والفرع 2 يحتوي على $R = 8.34 \Omega$ على التوالي مع مكثف متغير C (أ) أوجد C عند الرنين (ب) ارسم شكل المحل الهندسي للمسامحة . الجواب : (أ) $24 \mu\text{F}$ ، (ب) انظر شكل 12-56 .

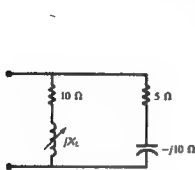


شكل 12-57

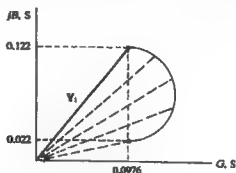


شكل 12-56

12.32 أوجد قيم R في حالة الرنين للشبكة المبينة شكل 12-57. ارسم المحل الهندسى للمسامحة .
الجواب : لا يمكن الحصول على الرنين بتغيير قيمة R . انظر شكل 12-58.



شكل 12-59

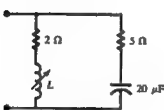


شكل 12-58

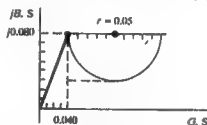
12.33 في المسألة 12-32 لأى قيمة للممانعة الحثية يمكن بها الحصول على الرنين عند قيمة أو أخرى للمقاومة المتغيرة R . الجواب : $X_L \leq 8.2 \Omega$.

12.34 (أ) إنشاء شكل المحل الهندسى للمسامحة للدائرة المبينة شكل 12-59. (ب) عند أى قيمة للمقاومة في الفرع RL يمكن الحصول على الرنين لقيمة واحدة فقط للمتغير X_L ؟

الجواب : (أ) انظر شكل 12-60. (ب) 6.25Ω .



شكل 12-61



شكل 12-60

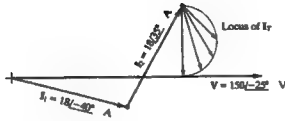
12.35 أوجد قيمة (أو قيم) L التى تكون فيها الدائرة شكل 12-61 فى حالة رنين عند 5000 rad/s .
الجواب : 2.43 mH ، $66.0 \mu\text{H}$.

12.36 دائرة توازى ذات ثلاث أفرع بها عناصر ثابتة فى فرعين وفى الفرع الثالث أحد العناصر متغيراً. وكان شكل متجهات الجهد/ التيار كما هو مبين شكل 12-62. حدد جميع العناصر إذا كان $\omega = 5000 \text{ rad/s}$.

الجواب: الفرع 1 : $R = 8.05 \Omega$ ، $L = 0.431 \text{ mH}$.

الفرع 2 : $R = 4.16 \Omega$ ، $C = 27.7 \mu\text{F}$.

الفرع 3 : متغيرة R ، $L = 2.74 \text{ mH}$.



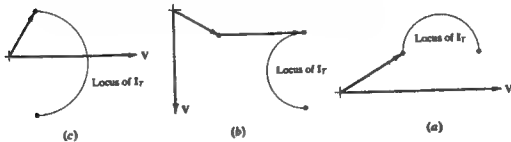
شكل 12-62

12.37 اشرح الدائرة المناسبة لكل محل هندسى مبين فى شكل 12-63 إذا كان بكل دائرة عنصر واحد متغير .

الجواب: (أ) دائرة ذات فرعين توازى . الفرع 1: R ثابتة ، X_C ثابتة . الفرع 2: R ثابتة ، X_C متغيرة .

(ب) دائرة ذات ثلاث أفرع توازى . الفرع 1: R ثابتة ، X_C ثابتة . الفرع 2: X ثابتة ، الفرع 3: R ثابتة ، X_L متغيرة .

(ج) دائرة تحتوى على فرعين توازى . الفرع 1: R ثابتة ، X_C ثابتة الفرع 2 ، X_L ثابتة ، R متغيرة .



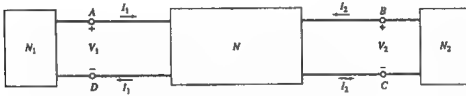
شكل 12-63

الفصل الثالث عشر

الشبكات ذات المدخلين

13.1 الأطراف والمدخل

فى الشبكة ذات الطرفين يرتبط جهد الطرف مع تيار الطرف بالمعاوقة $Z = V/I$ وفى الشبكة ذات الأربعة أطراف إذا كان كل زوج منها (أو مدخل) متصل بمفرده إلى دائرة أخرى كما فى شكل 13-1 فإن المتغيرات الأربعة i_1, i_2, v_1, v_2 ترتبط ببعضها بمعادلتين تسمى خواص الأطراف. ومن معادلتى الشبكتين ومعادلتى خواص الأطراف نحصل على العدد الكافى من المعادلات اللازمة للحصول على المتغيرات الأربعة.



شكل 13-1

13.2 معاملات Z

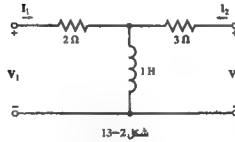
يمكن كتابة معادلات خواص الأطراف للشبكة ذات المدخلين والتي تحتوى على العناصر الخطية والمتابع المطلقة فى مجال s كالتالى:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (1)$$

والعوامل Z_{ij} لها تميز المعاوقة وتسمى معاملات Z للشبكة . وتسمى أيضاً معاملات معاوقة الدائرة المفتوحة حيث أنها تقاس عند أحد الأطراف بينما يكون الطرف الآخر مفتوحاً . وهي كالتالى :

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} \\ Z_{12} &= \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} \\ Z_{21} &= \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \\ Z_{22} &= \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} \end{aligned} \quad (2)$$

مثال 13.1 : أوجد معاملات Z للدائرة ذات المدخلين فى شكل 13-2 .



استخدم KVL حول الحلقتين فى شكل 13-2 بتياري حلقة I_1 ، I_2 للحصول على :

$$\begin{aligned} V_1 &= 2I_1 + s(I_1 + I_2) = (2 + s)I_1 + sI_2 \\ V_2 &= 3I_2 + s(I_1 + I_2) = sI_1 + (3 + s)I_2 \end{aligned} \quad (3)$$

يمكن إيجاد معاملات Z للدائرة بمقارنة (1) ، (3) .

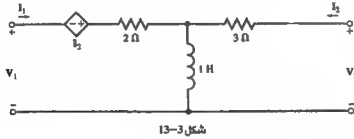
$$\begin{aligned} Z_{11} &= s + 2 \\ Z_{12} &= Z_{21} = s \\ Z_{22} &= s + 3 \end{aligned} \quad (4)$$

لاحظ أنه فى هذا المثال $Z_{12} = Z_{21}$.

الشبكات القابلة للعكس والغير قابلة للعكس :

تسمى الشبكة ذات الدخيلين بأنها قابلة للعكس إذا كانت معاوقات التحويل للدائرة المفتوحة متساوية $Z_{12} = Z_{21}$. وبالتالي فإنه في دائرة المدخلين القابلة للعكس مع وجود التيار I يغذى أحد المدخلين فإن جهد الدائرة المفتوحة المقاس في المدخل الآخر سيكون هو نفسه بغض النظر عن أى المدخلين يقاس وبالتالي فإن الجهد يكون مساوياً للقيمة $V = Z_{12}I = Z_{21}I$. وتكون الشبكات التى تحتوى على المقاومات والملفات والمكثفات غالباً قابلة للعكس أما الشبكات التى تحتوى على منابع تابعة بالإضافة لما سبق تكون غالباً غير قابلة للعكس (انظر مثال 13-2) .

مفصال 13.2 : الدائرة ذات المدخلين المبينة شكل 13-3 تحتوى على منبع جهد ذو تيار تابع . أوجد معاملات Z لها .



كما فى مثال 13-1 نستخدم KVL حول الحلقتين .

$$V_1 = 2I_1 - I_2 + s(I_1 + I_2) = (2 + s)I_1 + (s - 1)I_2$$

$$V_2 = 3I_2 + s(I_1 + I_2) = sI_1 + (3 + s)I_2$$

معاملات Z هي :

$$Z_{11} = s + 2$$

$$Z_{12} = s - 1$$

$$Z_{21} = s$$

$$Z_{22} = s + 3$$

(5)

ومع وجود المنبع التابع في الدائرة $Z_{12} \neq Z_{21}$ وبالتالي فإن الدائرة ذات المدخلين لا تكون معكوسة .

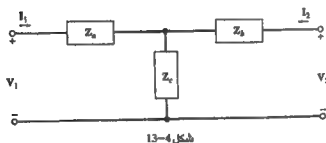
13.3 مكافئ T للشبكات المعكوسة

يمكن تمثيل الشبكة المعكوسة بمكافئ T لها كما هو مبين في الدائرة شكل 13-4 . Z_a ، Z_b ، Z_c يمكن الحصول عليها من معاملات Z كالتالي :

$$\begin{aligned} Z_a &= Z_{11} - Z_{12} \\ Z_b &= Z_{22} - Z_{21} \\ Z_c &= Z_{12} = Z_{21} \end{aligned} \quad (6)$$

ليس من الضروري تحقيق مكافئ T للشبكة .

مثال 13.3 : أوجد معاملات Z لشكل 13-4 .



شكل 13-4

مرة أخرى بتطبيق KVL للحصول على :

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_a I_1 + Z_c (I_1 + I_2) = (Z_a + Z_c) I_1 + Z_c I_2 \\ V_2 &= Z_b I_2 + Z_c (I_1 + I_2) = Z_c I_1 + (Z_b + Z_c) I_2 \end{aligned} \quad (7)$$

يمكن إيجاد معاملات Z بمقارنة (1) ، (7) .

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_a + Z_c \\ Z_{12} &= Z_{21} = Z_c \\ Z_{22} &= Z_b + Z_c \end{aligned}$$

13.4 معاملات Y

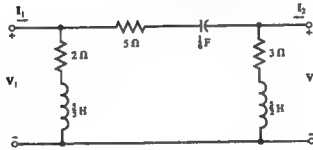
يمكن أيضاً كتابة خواص الأطراف كما في (9) حيث نعبر عن I_2 ، I_1 بدلالة V_1 ، V_2 .

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 &= Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{aligned} \quad (9)$$

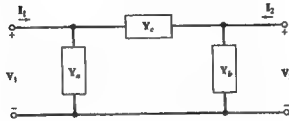
تميز المعاملات Y_{ij} مثل المسامحة وهي تسمى معاملات Y أو معاملات مسامحة الدائرة القصيرة لأنها تقاس عند أحد الدخيلين بينما يكون الدخيل الآخر مقصوراً.

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0} \\ Y_{12} &= \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0} \\ Y_{21} &= \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} \\ Y_{22} &= \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0} \end{aligned} \quad (10)$$

مثال 13.4 : أوجد معاملات Y للدائرة شكل 13-5 .



شكل 13-5



شكل 13-6

نستخدم KCL لمعدني الدخل والخرج (للتوضيح نعتبر عن المساحات للثلاث أفرع بالدائرة Y_a ، Y_c ، Y_b كما هو مبين شكل 6-13 ولذلك :

$$\begin{aligned} Y_a &= \frac{1}{2 + 5s/3} = \frac{3}{5s + 6} \\ Y_b &= \frac{1}{3 + 5s/2} = \frac{2}{5s + 6} \\ Y_c &= \frac{1}{5 + 6/s} = \frac{s}{5s + 6} \end{aligned} \quad (11)$$

معادلتا المقدة هما :

$$\begin{aligned} I_1 &= V_1 Y_a + (V_1 - V_2) Y_c = (Y_a + Y_c) V_1 - Y_c V_2 \\ I_2 &= V_2 Y_b + (V_2 - V_1) Y_c = -Y_c V_1 + (Y_b + Y_c) V_2 \end{aligned} \quad (12)$$

بمقارنة (9) مع (12) نحصل على :

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_a + Y_c \\ Y_{12} &= Y_{21} = -Y_c \\ Y_{22} &= Y_b + Y_c \end{aligned} \quad (13)$$

بالتعويض بقيمة Y_c ، Y_b ، Y_a من معادلة (11) في (13) نحصل على :

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{s+3}{5s+6} \\ Y_{12} &= Y_{21} = \frac{-s}{5s+6} \\ Y_{22} &= \frac{s+2}{5s+6} \end{aligned} \quad (14)$$

وحيث أن $Y_{12} = Y_{21}$ فإن الدائرة ذات المدخلين تكون قابلة للعكس .

13.5 مكافئ π للشبكات القابلة للعكس

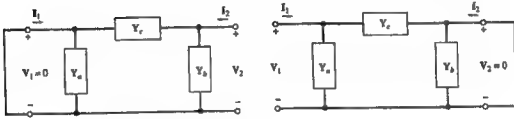
يمكن تمثيل الشبكة القابلة للعكس بمكافئ π لها كما هو مبين شكل 13-6 وبالعناصر الثلاثة لشبكة π المكافئة يمكن إيجادها بالحل العكسي. فتوجد أولاً معاملات Y لشكل 13-6 ومن (10) نحصل على:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_a + Y_c & [\text{Fig. 13-7(a)}] \\ Y_{12} &= -Y_c & [\text{Fig. 13-7(b)}] \\ Y_{21} &= -Y_c & [\text{Fig. 13-7(a)}] \\ Y_{22} &= Y_b + Y_c & [\text{Fig. 13-7(b)}] \end{aligned} \quad (15)$$

والتي منها

$$Y_a = Y_{11} + Y_{12} \quad Y_b = Y_{22} + Y_{12} \quad Y_c = -Y_{12} = -Y_{21} \quad (16)$$

ليس من الضروري تحقيق مكافئ π للشبكة:



(b)

(a)

شكل 13-7

13.6 تطبيقات على خواص الاطراف

ترتبط المتغيرات الأربعة I_1 ، I_2 ، V_1 ، V_2 ببعضها في شبكة الدخيلين بالمعادلتين (1)، (9). ويمكن الحصول على معادلتين إضافيتين بتوصيل الدائرة ذات الدخيلين للخارج كما في شكل 13-1 بالتالي فإنه يمكن الحصول على I_1 ، I_2 ، V_1 ، V_2 من المعادلات الأربعة بدون أى معلومات عن التركيب الداخلى للدائرة.

مسألة 13.5 : معاملات Z للشبكة ذات الدخلين هي :

$$Z_{11} = 2s + 1/s \quad Z_{12} = Z_{21} = 2s \quad Z_{22} = 2s + 4$$

تتصل الشبكة بمنبع وحمل كما هو مبين شكل 13-8 . أوجد V_2 ، V_1 ، I_2 ، I_1 .



شكل 13-8

خواص الأطراف تعطى بالتالى :

$$V_1 = (2s + 1/s)I_1 + 2sI_2 \quad (17)$$

$$V_2 = 2sI_1 + (2s + 4)I_2$$

التمثيل الاتجاهى للجهد $V(t)$ هو $V_s = 12 \text{ V}$ مع $z = s$. من KVL حول حلقتى الدخل والخرج نحصل على معادلتين إضافيتين (18) .

$$V_s = 3I_1 + V_1 \quad (18)$$

$$0 = (1 + s)I_2 + V_2$$

بتعويض $z = s$ ، $V_s = 12 \text{ V}$ فى (17) وفى (18) :

$$V_1 = jI_1 + 2/I_2$$

$$V_2 = 2jI_1 + (4 + 2j)I_2$$

$$12 = 3I_1 + V_1$$

$$0 = (1 + j)I_2 + V_2$$

والتي منها

$$I_1 = 3.29 / -10.2^\circ$$

$$I_2 = 1.13 / -131.2^\circ$$

$$V_1 = 2.88 / 37.5^\circ$$

$$V_2 = 1.6 / 93.8^\circ$$

13.7 التحويل بين معاملات Z ومعاملات Y

يمكن الحصول على معاملات Y من معاملات Z بحل (1) لقيم I_1 ، I_2 ، ويتطبيق قانون كرامر للمعادلة (1) نحصل على :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{Z_{22}}{D_{zz}} V_1 - \frac{Z_{12}}{D_{zz}} V_2 \\ I_2 &= \frac{-Z_{21}}{D_{zz}} V_1 + \frac{Z_{11}}{D_{zz}} V_2 \end{aligned} \quad (19)$$

حيث $D_{zz} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$ هو محاور المعاملات في (1) وبمقارنة (19) مع (9) نحصل على :

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{Z_{22}}{D_{zz}} \\ Y_{12} &= \frac{-Z_{12}}{D_{zz}} \\ Y_{21} &= \frac{-Z_{21}}{D_{zz}} \\ Y_{22} &= \frac{Z_{11}}{D_{zz}} \end{aligned} \quad (20)$$

ولكى يتحقق وجود معاملات Z المكافئة لمعاملات Y فإن المحدد D_{zz} يجب ألا يكون صفراً .
ومن جهة أخرى بمعرفة معاملات Y فإن معاملات Z هي :

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{Y_{22}}{D_{yy}} \\ Z_{12} &= \frac{-Y_{12}}{D_{yy}} \\ Z_{21} &= \frac{-Y_{21}}{D_{yy}} \\ Z_{22} &= \frac{Y_{11}}{D_{yy}} \end{aligned} \quad (21)$$

حيث $D_{YY} = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$ هي محدد المعاملات في (9). وللحصول على معاملات Z للدائرة ذات الدخيلين من معاملات Y فإن D_{YY} يجب ألا تكون صفراً.

مثال 13.6 بالرجوع لمثال 13-4 أوجد معاملات Z للدائرة شكل 13-5 من معاملات Y لها.

وجد أن معاملات Y للدائرة كالتالي [انظر (14)].

$$Y_{11} = \frac{s+3}{5s+6} \quad Y_{12} = Y_{21} = \frac{-s}{5s+6} \quad Y_{22} = \frac{s+2}{5s+6}$$

بالتعويض في (21) حيث $D_{YY} = 1 / (5s+6)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} Z_{11} &= s+2 \\ Z_{12} &= Z_{21} = s \\ Z_{22} &= s+3 \end{aligned} \quad (22)$$

معاملات Z في (22) مطابقة لمعاملات Z للدائرة شكل 13-2. وبذلك تكون الدائرتان متكافئتين من وجهة نظر الأطراف. وكان ذلك من التصميم. شكل 13-2 هو مكافئ T لشكل 13-5. ويمكن تحقيق التكافؤ بين شكل 13-2 ، 13-5 مباشرة بتطبيق (6) لمعاملات Z المعطاه في (22) للحصول على مكافئ الشبكة T لها.

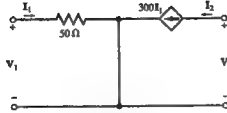
13.8 معاملات h (هجين)

من الأفضل في بعض الدوائر ذات الدخيلين أو النباذات الالكترونية التعبير عنها بمعادلتى الأطراف التالية :

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{aligned} \quad (23)$$

حيث h_{ij} معاملات تسمى معاملات h أو معاملات هجين.

مثال 13.7 : أوجد معاملات h لشكل 13-9.



شكل 9-13

وهذا هو التمثيل المبسط لوصلة الترانزستور ثنائي القطبية في مجال تشغيلها الخطي . ومن الشكل فإن خواص الأطراف تكون :

$$V_1 = 50I_1 \quad \text{and} \quad I_2 = 300I_1 \quad (24)$$

بمقارنة (24) ، (23) نحصل على (25) .

$$h_{11} = 50 \quad h_{12} = 0 \quad h_{21} = 300 \quad h_{22} = 0 \quad (25)$$

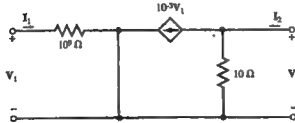
13.9 معاملات g

يمكن أيضاً تمثيل معادلتى الخواص للدائرة ذات الدخيلين بصورة أخرى من معاملات هجين كما هو فى (26) .

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 &= g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{aligned} \quad (26)$$

حيث معاملات g تسمى معكوس هجين أو معاملات g .

مثال 13.8 أوجد معاملات g للدائرة المبينة شكل 10-13 .



شكل 10-13

وهذا هو التمثيل المبسط للترانزستور ذو الأثر المجالى فى مجال التشغيل الخطى . وللحصول على معاملات g نستنتج أولاً معادلات الأطراف بتطبيق قانونى كير شيف عند الأطراف .

$$V_1 = 10^9 I_1 \text{ عند طرفى الدخل}$$

$$V_2 = 10 (I_2 - 10^{-3} V_1) \text{ عند طرف الخرج}$$

$$(27) \quad I_1 = 10^{-9} V_1 \quad \text{and} \quad V_2 = 10 I_2 - 10^{-2} V_1 \quad \text{أو}$$

بمقارنة (27) ، (26) نحصل على :

$$g_{11} = 10^{-9} \quad g_{12} = 0 \quad g_{21} = -10^{-3} \quad g_{22} = 10 \quad (28)$$

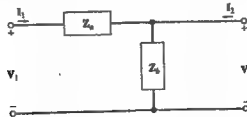
13.10 معاملات النقل

معاملات النقل A ، B ، C ، D تعبر عن متغيرات الدخل V_1 ، I_1 بدلالة متغيرات الطرف البعيد V_2 ، I_2 وهى تسمى ABCD أو معاملات T وتعرف بالمعادلتين :

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \quad (29)$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

مثال 13.9 : أوجد معاملات T لشكل 13-11 حيث كلا من Z_B ، Z_0 ليس صفراً .



شكل 13-11

وهذا هو التمثيل للمجمع لجزء صغير جداً من خط النقل . ومن (29) نحصل على :

$$\begin{aligned}
A &= \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{Z_o + Z_b}{Z_o} = 1 + Z_b Y_o \\
B &= - \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = Z_o \\
C &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = Y_b \\
D &= - \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = 1
\end{aligned} \tag{30}$$

13.11 توصيل شبكتين ذات مدخلين معاً

يمكن توصيل الشبكتين ذات الدخلين معاً بأشكال عامة متعددة قبل توصيلها على التوالي أو على التوازي أو بالتتابع بحيث تنشأ شبكة جهد جديدة ذات مدخلين . ولكل من هذه الأشكال مجموعة من المعاملات المحددة يمكن أن تكون مفيدة عن الأخرى كوصف الشبكة .

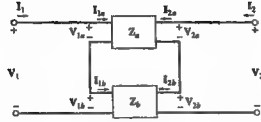
توصيلة التوالي :

يبين شكل 13-12 توصيلة التوالي لشبكتين كل منهما ذات مدخلين وهما a ، b . لكل منهما معاملات معاوقة الدائرة المفتوحة Z_o ، Z_b على الترتيب . ونستعمل في هذا الشكل العام معاملات Z حيث أنهما مرتبطان ببعضهما كتوصيلة توالى لمجموعتين من المعاوقات . ومعاملات Z لتوصيلة التوالي هي (انظر مسألة 13-10) .

$$\begin{aligned}
Z_{11} &= Z_{11,a} + Z_{11,b} \\
Z_{12} &= Z_{12,a} + Z_{12,b} \\
Z_{21} &= Z_{21,a} + Z_{21,b} \\
Z_{22} &= Z_{22,a} + Z_{22,b}
\end{aligned} \tag{31a}$$

أو على شكل مصفوفة .

$$[Z] = [Z_a] + [Z_b] \tag{31b}$$



شكل 13-12

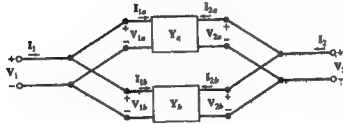
توصيلة التوازي

يبين شكل 13-13 توصيلة التوازي للشبكتين a ، b ذات المدخلين مع معاملات مسامحات الدائرة القصيرة Y_a ، Y_b . في هذه الحالة فإن معاملات Y تكون أكثر مناسبة في هذه الحالة . ومعاملات Y بتوصيلة التوازي هي (انظر مسألة 13-11) .

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_{11,a} + Y_{11,b} \\ Y_{12} &= Y_{12,a} + Y_{12,b} \\ Y_{21} &= Y_{21,a} + Y_{21,b} \\ Y_{22} &= Y_{22,a} + Y_{22,b} \end{aligned} \quad (32a)$$

أو بصيغة المصفوفة .

$$[Y] = [Y_a] + [Y_b] \quad (32b)$$



شكل 13-13

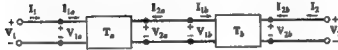
توصيلة التابع

توصيلة التابع لشبكتين ذات مدخلين a ، b مبيّنة في شكل 13-14 وفي هذه الحالة يكون من المناسب استخدام معاملات T. ومعاملات T لتوصيلة التابع هي :

$$\begin{aligned} A &= A_a A_b + B_a C_b \\ B &= A_a B_b + B_a D_b \\ C &= C_a A_b + D_a C_b \\ D &= C_a B_b + D_a D_b \end{aligned} \quad (33a)$$

أو بصورة المصفوفة .

$$[T] = [T_a][T_b] \quad (33b)$$

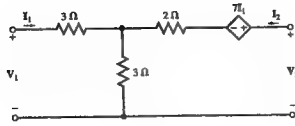


شكل 13-14

13.12 اختيار نوع المعامل

ما هو نوع المعامل الذي يكون مناسباً ويعطى أفضل وصف لشبكة ذات مدخلين أو نبطة؟ توجد عدة عوامل تؤثر في اختيار المعاملات . (1) من الممكن أن تكون بعض المعاملات غير متاحة مطلقاً وبالتالي لا يمكن تعريفها (انظر مثال 13-10). (2) هناك بعض المعاملات يكون من المناسب استخدامها حينما تتصل الشبكة بشبكة أخرى كما هو مبين في بند 13-11. وفي هذه الأثناء يتم تحويل الشبكة ذات المدخلين إلى شكل T أو π المكافئ لها ثم نستخدم التحليل المعتاد مثل اختصار العناصر وتقسيم التيار فإننا في هذه الحالة نكون قد قمنا بخفض العناصر وتبسيط الدائرة الكلية . (3) في بعض الشبكات أو النباط فإنها باستخدام معاملات خاصة قد تؤدي إلى تحسين الحسابات لتكون أكثر دقة وأحسن حساسية عند استخدامها في الدائرة المركبة .

مثال 13.10 : أوجد معاملات Z ومعاملات Y لشكل 13-16 .



شكل 13-15

نستخدم KVL لحلقتي الدخل والخرج ولذلك :

$$\text{حلقة الدخل : } V_1 = 3I_1 + 3(I_1 + I_2)$$

$$\text{حلقة الخرج : } V_2 = 7I_1 + 2I_2 + 3(I_1 + I_2)$$

$$(34) \quad V_1 = 6I_1 + 3I_2 \quad \text{and} \quad V_2 = 10I_1 + 5I_2 \quad \text{أو} \\ \text{بمقارنة (34) ، (2) نحصل على :}$$

$$Z_{11} = 6 \quad Z_{12} = 3 \quad Z_{21} = 10 \quad Z_{22} = 5$$

معاملات Y مع هذا ليست معرفة حيث أن استخدام الطريقة المباشرة للعلاقات (10) أو للتحويل من معاملات Z (19) ينتج $D_{ZZ} = 6(5) - 3(10) = 0$.

13.13 ملخص معاملات الأطراف والتحويلات

تعرف معاملات الأطراف بالمعادلات التالية :

$$\begin{aligned} \text{معاملات T} \\ V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{معاملات h} \\ V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{معاملات Z} \\ V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \\ [V] &= [Z][I] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{معاملات g} \\ I_1 &= g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 &= g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{معاملات Y} \\ I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \\ [I] &= [Y][V] \end{aligned}$$

يلخص جدول 13-1 التحويلات بين المعاملات Z, Y, h, g, T ولكي تكون التحويلات ممكنة فإن المحدد الخاص بمعاملات المتبع يجب ألا يكون صفراً.

جدول 13-1

	Z		Y		h		g		T	
Z	z_{11}	z_{12}	$\frac{y_{22}}{D_{YY}}$	$-\frac{y_{12}}{D_{YY}}$	$\frac{D_{hh}}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$-\frac{g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{D_{TT}}{C}$
	z_{21}	z_{22}	$-\frac{y_{21}}{D_{YY}}$	$\frac{y_{11}}{D_{YY}}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{D_{gg}}{g_{11}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$
Y	$\frac{z_{22}}{D_{ZZ}}$	$-\frac{z_{12}}{D_{ZZ}}$	y_{11}	y_{12}	$\frac{1}{h_{11}}$	$-\frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{D_{gg}}{g_{11}}$	$\frac{g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{D}{B}$	$-\frac{D_{TT}}{B}$
	$-\frac{z_{21}}{D_{ZZ}}$	$\frac{z_{11}}{D_{ZZ}}$	y_{21}	y_{22}	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$-\frac{D_{hh}}{h_{11}}$	$-\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$-\frac{1}{B}$	$\frac{A}{B}$
h	$\frac{D_{ZZ}}{z_{22}}$	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	$\frac{1}{y_{11}}$	$-\frac{y_{12}}{y_{11}}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{g_{22}}{D_{gg}}$	$\frac{g_{12}}{D_{gg}}$	$\frac{B}{D}$	$\frac{D_{TT}}{D}$
	$-\frac{z_{21}}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{22}}$	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{D_{YY}}{y_{11}}$	h_{21}	h_{22}	$\frac{g_{21}}{D_{gg}}$	$\frac{g_{11}}{D_{gg}}$	$-\frac{1}{D}$	$\frac{C}{D}$
g	$\frac{1}{z_{11}}$	$-\frac{z_{12}}{z_{11}}$	$\frac{D_{YY}}{y_{22}}$	$\frac{y_{12}}{y_{22}}$	$\frac{h_{21}}{D_{hh}}$	$-\frac{h_{12}}{D_{hh}}$	g_{11}	g_{12}	$\frac{C}{A}$	$-\frac{D_{TT}}{A}$
	$\frac{z_{22}}{z_{11}}$	$\frac{D_{ZZ}}{z_{11}}$	$-\frac{y_{21}}{y_{22}}$	$\frac{1}{y_{22}}$	$-\frac{h_{21}}{D_{hh}}$	$\frac{h_{11}}{D_{hh}}$	g_{21}	g_{22}	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$
T	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$\frac{D_{ZZ}}{z_{21}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{21}}$	$-\frac{1}{y_{21}}$	$-\frac{D_{hh}}{h_{21}}$	$-\frac{h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$	A	B
	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$-\frac{D_{YY}}{y_{21}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{21}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{21}}$	$-\frac{1}{h_{21}}$	$\frac{g_{21}}{g_{21}}$	$\frac{D_{gg}}{g_{21}}$	C	D

$D_{PP} = P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}$ is the determinant of Z-, Y-, h-, g- or T-parameters.

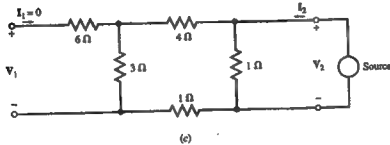
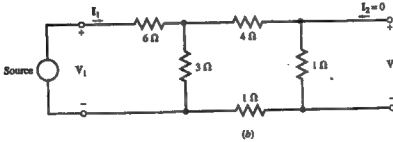
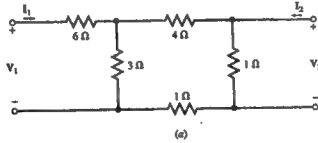
مسائل محلولة

13.1 أوجد معاملات Z للدائرة شكل 13-16(a).

يمكن الحصول على Z_{11} ، Z_{21} بتوصيل منبع للمدخل \neq وترك المدخل \neq 2 مفتوحاً [شكل 13-16(b)]. ويتيح من توصيلات التوالي والتوازي.

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = 8 \quad \text{and} \quad Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{3}$$

وبالمثل يمكن الحصول على Z_{12} ، Z_{22} بتوصيل منبع لمدخل \neq 2 وترك المدخل \neq 1 مفتوحاً [شكل 13-16(c)].



شكل 13-16

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{8}{9} \quad Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{3}$$

الدائرة قابلة للعكس حيث أن $Z_{21} = Z_{12}$.

13.2 معاملات Z للشبكة ذات المدخلين N هي:

$$Z_{11} = 2s + 1/s \quad Z_{12} = Z_{21} = 2s \quad Z_{22} = 2s + 4$$

(أ) أوجد المكافئ T للشبكة N. (ب) وصلت الشبكة N لتعب وحمل كما هو مبين في الدائرة شكل 13-8. استبدل الشبكة N بالمكافئ T لها ثم حل المسألة لإيجاد i_1 ، i_2 ، v_1 ، v_2 .

(أ) الثلاث أفرع لمكافئ T للشبكة (شكل 13-4) هي:

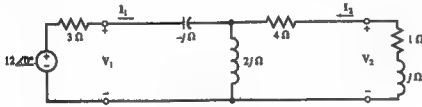
$$Z_a = Z_{11} - Z_{12} = 2s + \frac{1}{s} - 2s = \frac{1}{s}$$

$$Z_b = Z_{22} - Z_{12} = 2s + 4 - 2s = 4$$

$$Z_c = Z_{12} = Z_{21} = 2s$$

(ب) مكافئ T للشبكة N مع توصيلات الدخل والخرج مبين في مجال المتجهات في شكل

13-17.



شكل 13-17

باستخدام طريقة التحليل المعتمد والتي تشمل خفض العناصر وتوزيع التيار وذلك لشكل 13-17

يُجد i_1 ، i_2 ، v_1 ، v_2 .

في مجال المتجهات

$$i_1 = 3.29 \cos(t - 10.2^\circ)$$

$$i_2 = 1.13 \cos(t - 131.2^\circ)$$

$$v_1 = 2.88 \cos(t + 37.5^\circ)$$

$$v_2 = 1.6 \cos(t + 93.8^\circ)$$

في مجال الزمن

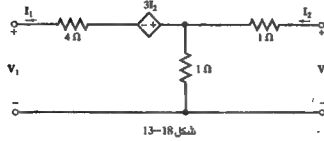
$$I_1 = 3.29 / -10.2^\circ$$

$$I_2 = 1.13 / -131.2^\circ$$

$$V_1 = 2.88 / 37.5^\circ$$

$$V_2 = 1.6 / 93.8^\circ$$

13.3 أوجد معاملات Z للشبكة ذات المدخلين في شكل 13-18.



شكل 13-18

بالمستخدم KVL عند طرفي الدخل والخروج نحصل على التالي :

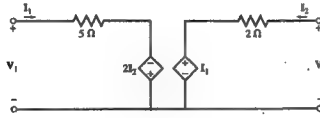
$$V_1 = 4I_1 + 3I_2 + (I_1 + I_2) = 5I_1 - 2I_2 \text{ طرفي الدخل}$$

$$V_2 = I_2 + (I_1 + I_2) = I_1 + 2I_2 \text{ طرفي الخروج}$$

وباستخدام معادلة (2) فإن $Z_{11} = 5, Z_{12} = -2, Z_{21} = 1, Z_{22} = 2$

13.4 أوجد معاملات Z للشبكة ذات المدخلين في شكل 13-19 وقارن نتائج مع تلك في المسألة

13-3.



شكل 13-19

قانون KVL يعطى :

$$V_1 = 5I_1 - 2I_2 \quad \text{and} \quad V_2 = I_1 + 2I_2$$

المعادلات السابقة مطابقة لخواص الأطراف التي حصلنا عليها في شبكة شكل 13-18 وبذلك

تكون الشبكتان متكافئتان.

13.5 أوجد معاملات Y لشكل 13-19 مستخدماً معاملات Z لها .

من المسألة 13-4 .

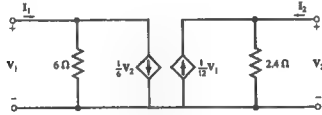
$$Z_{11} = 5, Z_{12} = -2, Z_{21} = 1, Z_{22} = 2$$

$$\text{Since } D_{zz} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = (5)(2) - (-2)(1) = 12,$$

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{D_{zz}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \quad Y_{12} = \frac{-Z_{12}}{D_{zz}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \quad Y_{21} = \frac{-Z_{21}}{D_{zz}} = \frac{-1}{12} \quad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{D_{zz}} = \frac{5}{12}$$

13.6 أوجد معاملات Y للشبكتين ذات الدخلين في شكل 13-20 وبالتالي بين أن الشبكتين شكلي

متكافئتان . 13-20 ، 13-19



شكل 13-20

بتطبيق KCL عند المداخل للحصول على خواص الأطراف ومعاملات Y وبالتالي :

$$I_1 = \frac{V_1}{6} + \frac{V_2}{6} \quad \text{طرفي الدخل} :$$

$$I_2 = \frac{V_2}{2.4} - \frac{V_1}{12} \quad \text{طرفي الخرج} :$$

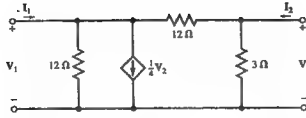
$$Y_{11} = \frac{1}{6} \quad Y_{12} = \frac{1}{6} \quad Y_{21} = \frac{-1}{12} \quad Y_{22} = \frac{1}{2.4} = \frac{5}{12} \quad \text{و}$$

وهي مطابقة لمعاملات Y التي حصلنا عليها في المسألة 13-5 شكل 13-19 وبالتالي فإن الشبكتين

متكافئتان .

13.7 استخدام معادلات الدائرة القصيرة (10) لإيجاد معاملات Y للشبكة ذات المدخلين في

شكل 13-21 .



شكل 13-21

$$I_1 = Y_{11} V_1 | V_2=0 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right) V_1 \quad \text{or} \quad Y_{11} = \frac{1}{6}$$

$$I_1 = Y_{12} V_2 | V_1=0 = -\frac{V_2}{4} - \frac{V_2}{12} = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) V_2 \quad \text{or} \quad Y_{12} = -\frac{1}{6}$$

$$I_2 Y_{21} V_1 | V_2=0 = -\frac{V_1}{12} \quad \text{or} \quad Y_{21} = -\frac{1}{12}$$

$$I_2 = Y_{22} V_2 | V_1=0 = \frac{V_2}{3} + \frac{V_2}{12} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) V_2 \quad \text{or} \quad Y_{22} = \frac{5}{12}$$

13.8 استخدم KCL عند عقد الشبكة في شكل 13-21 للحصول على خواص الأطراف ومعاملات Y. بين أن الشبكتين في شكل 13-18، 13-21 متكافئتان.

$$I_1 = \frac{V_1}{12} + \frac{V_1 - V_2}{12} + \frac{V_2}{4} \quad \text{عقدة الدخل} :$$

$$I_2 = \frac{V_2}{3} + \frac{V_2 - V_1}{12} \quad \text{عقدة الخرج} :$$

$$I_1 = \frac{1}{6} V_1 + \frac{1}{6} V_2 \quad I_2 = -\frac{1}{12} V_1 + \frac{5}{12} V_2$$

معاملات Y التي ذكرت في معادلات الخواص السابقة مطابقة لمعاملات Y للدوائر في أشكال 13-18، 13-19، 13-20 وبالتالي فإن الأربع دوائر متكافئة.

13.9 إذا كانت معاملات Z للشبكة N ذات المدخلين في شكل 13-22(a) هي $Z_{11} = 4s$ ،

$Z_{22} = 9s$ ، $Z_{12} = Z_{21} = 3s$ استبدل N بمكافئ T لها. (ب) استخدم الجزء (أ) لإيجاد تيار

الدخل i_1 للجهد $v_s = \cos 1000t$ (V).

(أ) الشبكة قابلة للعكس وبالتالي فإن مكافئ T له وجود ويمكن إيجاد حدوده من (6) كما هو

مبين في الدائرة شكل 13-22(b).

$$Z_a = Z_{11} - Z_{12} = 4s - 3s = s$$

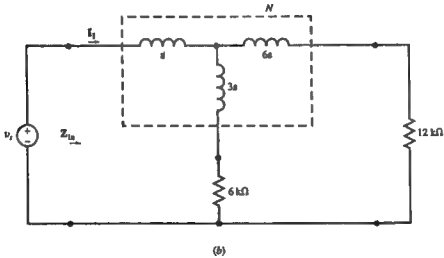
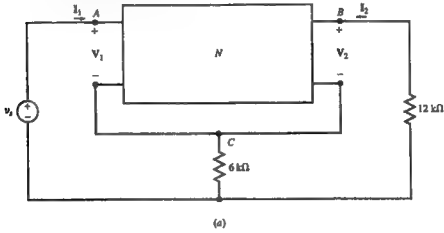
$$Z_b = Z_{22} - Z_{21} = 9s - 3s = 6s$$

$$Z_c = Z_{12} = Z_{21} = 3s$$

(ب) نکرر توصیل التوالی والتوازی لعناصر شکل 13-22(b) باعتبار المقاوّمات بوحدات $k\Omega$ ، s بوحدات $k \text{ rad/s}$ لإيجاد Z_{in} بوحدات $k\Omega$ كما هو مبين فيما يمد.

$$Z_{in}(s) = V_1 / I_1 = s + \frac{(3s + 6)(6s + 12)}{9s + 18} = 3s + 4 \quad \text{or} \quad Z_{in}(j) = 3j + 4 = 5 \angle 36.9^\circ \text{ k}\Omega$$

$$\text{and } i_1 = 0.2 \cos(1000t - 36.9^\circ) \text{ (mA).}$$



شكل 13-22

13.10 شبكتان ذات دخلين a ، b لها معاوقات الدائرة المفتوحة Z_a ، Z_b متصلتان على التوالي (انظر

شكل 13-12). استنتج معادلات معاملات Z (13-a).

من الشبكة a نحصل على :

$$V_{1a} = Z_{11,a} I_{1a} + Z_{12,a} I_{2a}$$

$$V_{2a} = Z_{21,a} I_{1a} + Z_{22,a} I_{2a}$$

من الشبكة b :

$$V_{1b} = Z_{11,b} I_{1b} + Z_{12,b} I_{2b}$$

$$V_{2b} = Z_{21,b} I_{1b} + Z_{22,b} I_{2b}$$

من التوصيل بين a ، b نحصل على :

$$I_1 = I_{1a} = I_{1b} \quad V_1 = V_{1a} + V_{1b}$$

$$I_2 = I_{2a} = I_{2b} \quad V_2 = V_{2a} + V_{2b}$$

وبالتالى :

$$V_1 = (Z_{11,a} + Z_{11,b}) I_1 + (Z_{12,a} + Z_{12,b}) I_2$$

$$V_2 = (Z_{21,a} + Z_{21,b}) I_1 + (Z_{22,a} + Z_{22,b}) I_2$$

ومنها نستنتج معاملات Z (13a).

13.11 للشبكتين a ، b ذات المدخلين لها مسامحات الدائرة القصيرة Y_a ، Y_b متصلتان على التوازي

(انظر شكل 13-13) استنتج معادلات معاملات Y (32a).

من الشبكة a نحصل على :

$$I_{1a} = Y_{11,a} V_{1a} + Y_{12,a} V_{2a}$$

$$I_{2a} = Y_{21,a} V_{1a} + Y_{22,a} V_{2a}$$

من الشبكة b نحصل على :

$$I_{1b} = Y_{11,b} V_{1b} + Y_{12,b} V_{2b}$$

$$I_{2b} = Y_{21,b} V_{1b} + Y_{22,b} V_{2b}$$

من التوصيل بين a ، b نحصل على :

$$V_1 = V_{1a} = V_{1b} \quad I_1 = I_{1a} + I_{1b}$$

$$V_2 = V_{2b} = V_{2a} \quad I_2 = I_{2a} + I_{2b}$$

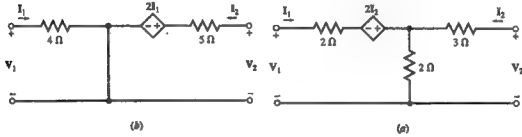
وبالتالى فإن :

$$I_1 = (Y_{11,a} + Y_{11,b})V_1 + (Y_{12,a} + Y_{12,b})V_2$$

$$I_2 = (Y_{21,a} + Y_{21,b})V_1 + (Y_{22,a} + Y_{22,b})V_2$$

والتي منها ينتج معاملات Y (32a).

13.12 أوجد (أ) معاملات Z للدائرة شكل (a)-13، (ب) التمثيل المكافئ الذى يستخدم مقاومتين موجبتين ومنبع جهد تابع .



شكل 13-23

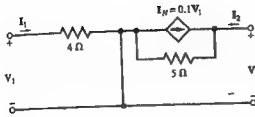
(أ) من تطبيق KVL حول حلقتين الدخل والخرج فإننا نجد على التوالى :

$$V_1 = 2I_1 - 2I_2 + 2(I_1 + I_2) = 4I_1$$

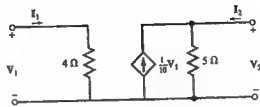
$$V_2 = 3I_2 + 2(I_1 + I_2) = 2I_1 + 5I_2$$

وتكون معاملات Z هي $Z_{11} = 4$ ، $Z_{12} = 0$ ، $Z_{21} = 2$ ، $Z_{22} = 5$ وبالتالى فإن $D_{ZZ} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = 20$ وبالتالى :

(ب) لشكل 13-24 ذو المقاومتين ومنبع التيار نفس معاملات Y التى فى الدائرة شكل (a)-13. ويمكن تحقيق ذلك باستخدام KCL لعقدتى الدخل والخرج .



شكل 13-25

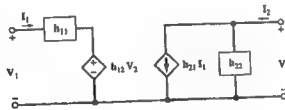


شكل 13-24

13.14 بالرجوع لشبكة شكل 13-23(b) حول منبع الجهد ومقاومة التوالى له المكافئ نورتون وبين أن الشبكة الناتجة تكون مطابقة مع شكل 13-24 .

التيار المكافئ لنورتون للمنبع $I_N = 2I_1 / 5 = 0.4 I_1$ ولكن $I_1 = V_1 / 4$ لذلك $I_N = 0.1 V_1$ وتوضع المقاومة 5Ω على التوازي مع I_N والدائرة المبينة شكل 13-25 وهى نفسها كما فى الدائرة شكل 13-24 .

13.15 إذا علمت معاملات h للشبكة ذات المدخلين . بين أنه يمكن تمثيل الشبكة بشبكة شكل 13-26 حيث h_{11} هى معاوقة ، h_{12} هى كسب الجهد ، h_{21} هى كسب التيار ، h_{22} هى مساحمة .



شكل 13-26

استخدم KVL حول حلقة الدخل لتحصل على :

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2$$

استخدم KCL عند عقدة الخرج لتحصل على :

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2$$

هذه النتائج تتفق مع تعريف معاملات h المعطاه فى (23) .

13.16 أوجد معاملات h للدائرة شكل 13-25 .

مقارنة الدائرة شكل 13-25 بتلك التي في شكل 13-26 نجد أن :

$$h_{11} = 4 \Omega, \quad h_{12} = 0, \quad h_{21} = -0.4, \quad h_{22} = 1/5 = 0.2 \Omega^{-1}$$

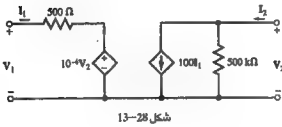
13.17 أوجد معاملات h للدائرة شكل 13-25 من معاملات Z لها وقارن بالنتائج التي في المسألة 13-16 .

بالرجوع للمسألة 13-13 من أجل قيم معاملات Z ، D_{ZZ} . استخدم الجدول 13-1 للحصول على التحويلات من معاملات Z وإلى معاملات h للدائرة وبالتالي :

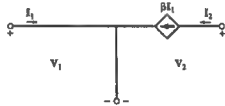
$$h_{11} = \frac{D_{ZZ}}{Z_{22}} = \frac{20}{5} = 4 \quad h_{12} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = 0 \quad h_{21} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} = \frac{-2}{5} = -0.4 \quad h_{22} = \frac{1}{Z_{22}} = \frac{1}{5} = 0.2$$

النتائج السابقة تتفق مع نتائج مسألة 13-16 .

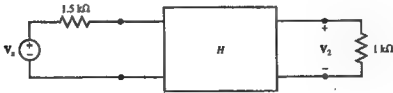
13.18 تبين الدائرة شكل 13-27 التمثيل المبسط لوصلية ترانزستور ثنائية للإشارات الصغيرة . أوجد معاملات h لها .



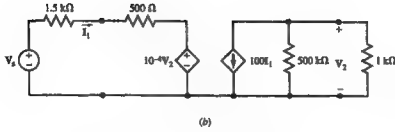
شكل 13-28



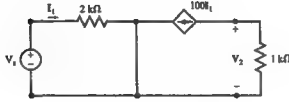
شكل 13-27



(a)



(b)



(c)

شكل 13-29

معادلات الأطراف هي $I_2 = \beta I_1$ ، $V_1 = 0$ نستنتج أن $h_{12} = \beta$ ، $h_{11} = h_{12} = h_{22} = 0$

13.19 إذا كانت معاملات h للنبيطة H ذات المدخلين هي :

$$h_{11} = 500 \Omega \quad h_{12} = 10^{-4} \quad h_{21} = 100 \quad h_{22} = 2(10^{-6}) \Omega^{-1}$$

ارسم تمثيلاً للدائرة للنبيطة المكونة من مقاومتين ومنبعين تابعين متضمناً قيمة كل عنصر .

بالمقارنة مع شكل 13-26 نرسم النموذج لشكل 13-28 .

13.20 النبيطة H للمسألة 13-19 وضعت في دائرة شكل 13-29(a) استبدل H بتمثيلها في شكل 13-28 . وأوجد V_2/V_s .

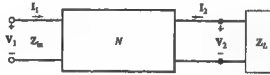
الدائرة شكل 13-29(b) تشمل التمثيل للدائرة . وتقريب معقول يمكن تبسيطها لشكل 13-29(c)

والتي منها :

$$I_1 = V_s / 2000 \quad V_2 = -1000(100 I_1) = -1000(100 V_s / 2000) = -50 V_s$$

Thus, $V_2 / V_s = -50$.

13.21 وصل حمل Z_L لخرج النبيلة N ذات المدخلين (شكل 13-30). والتي يكون خواص الأطراف لها هي $V_1 = (1/N) V_2$ ، $I_1 = -NI_2$. أوجد (أ) معاملات T للنبيلة N ، (ب) معاوقة الدخل $Z_{in} = V_1/I_1$.



شكل 13-30

(أ) تعرف معاملات T بالتالي [انظر (29)].

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

خواص الأطراف للنبيلة هي:

$$V_1 = (1/N)V_2$$

$$I_1 = -NI_2$$

بمقارنة الزوجين من المعادلات نحصل على $A = 1/N$ ، $B = 0$ ، $C = 0$ ، $D = N$.

(ب) ثلاث معادلات تربط V_1 ، I_1 ، V_2 ، I_2 ويمكن الحصول عليها. أثنان منها نحصل عليها من خواص الأطراف للنبيلة ونحصل على الثالثة من التوصيل للحمل.

$$V_2 = -Z_L I_2$$

بحذف V_2 ، I_2 من الثلاث معادلات نحصل على:

$$V_1 = Z_L I_1 / N^2 \quad \text{from which} \quad Z_{in} = V_1 / I_1 = Z_L / N^2$$

13.22 معاملات Z للشبكة N ذات المدخلين (a) 13-22 هي $Z_{11} = 4s$ ، $Z_{12} = Z_{21} = 3s$ ، $Z_{22} = 9s$.

أوجد تيار الدخل i_1 للجهود $v_s = \cos 1000t$ (V) باستخدام معاوقة خواص الأطراف للدائرة المفتوحة للنبيلة N وذلك بالإضافة مع معادلات KCL عند العقد A ، B ، C .

$$i_1 = 0.2 \cos (1000t - 36.9^\circ) \text{ (A)}$$

الجواب:

13.23 عبر عن قاعدة قابلية العكس بدلالة كل من معاملات T ، g ، h :

$$h_{12} + h_{21} = 0, g_{12} + g_{21} = 0, \text{ and } AD - BC = 1 \quad \text{الجواب:}$$

13.24 أوجد معاملات T للنبيطة ذات المدخلين التي لها معاملات Z هي: $Z_{11} = s$ ،

$$Z_{22} = 100s, Z_{21} = Z_{12} = 10s$$

$$A = 0.1, B = 0, C = 10^{-1}/s, \text{ and } D = 10 \quad \text{الجواب:}$$

13.25 أوجد معاملات T للنبيطة ذات مدخلين التي لها معاملات Z كالتالي $Z_{11} = 10^6s$ ،

$$Z_{22} = 10^8s, Z_{12} = Z_{21} = 10^7s$$

الجواب: $A = 0.1, B = 0, C = 10^{-7}/s, D = 10$ وعند الترددات العالية فإن النبيطة ستكون

مشابهة بتلك في المسألة 13-21 مع $N = 10$.

13.26 معاملات Z للنبيطة N ذات المدخلين هي $Z_{11} = ks, Z_{12} = Z_{21} = 10ks, Z_{22} = 100ks$.

وصلت مقاومة 1Ω على طرفي الخرج (شكل 13-10) (أ) أوجد معاوقة الدخل $Z_{in} = V_1/I_1$ وكون الدائرة المكافئة لها . (ب) أوجد قيم العناصر عند $k = 1, k = 10$.

$$Z_{in} = \frac{ks}{1 + 100ks} = \frac{1}{100 + 1/ks} \quad \text{الجواب:}$$

الدائرة المكافئة هي دائرة توازي RL وبها $R = 10^{-2}\Omega$ ، $L = 1\text{ kH}$.

$$(ب) \text{ لقيم } k = 1, R = \frac{1}{100}\Omega \text{ and } L = 1\text{ H. For } k = 10^6, R = \frac{1}{100}\Omega \text{ and } L = 10^6\text{ H}$$

13.27 النبيطة N في شكل 13-30 تحدد بمعاملات Z التالية $Z_{22} = N^2 Z_{11}$ ،

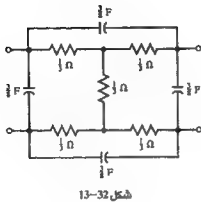
$$Z_{12} = Z_{21} = \sqrt{Z_{11} Z_{22}} = N Z_{11} \text{ . أوجد } Z_{in} \text{ حينما نوصل الحمل } Z_L \text{ لطرفي الخرج .}$$

بين أنه إذا كان $Z_L / N^2 \gg Z_{11}$ فإننا نحصل على مقياس للمعاوقة حيث أن $Z_{in} = Z_L / N^2$.

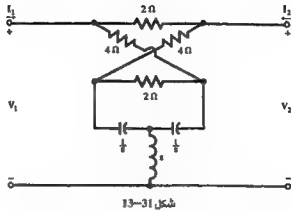
$$Z_{in} = \frac{Z_L}{N^2 + Z_L/Z_{11}} \text{ . For } Z_L \ll N^2 Z_{11}, Z_{in} = Z_L/N^2 \quad \text{الجواب:}$$

13.28 أوجد معاملات Z في الدائرة شكل 13-31 ملحوظة : استخدم قانون توصيلة التوالى .

$$Z_{11} = Z_{22} = s + 3 + 1/s, Z_{12} = Z_{21} = s + 1 \quad \text{الجواب:}$$



شكل 13-32



شكل 13-31

13.29 أوجد معاملات Y في الدائرة شكل 13-32. ملحوظة استخدم قانون توصيلة التوازي.

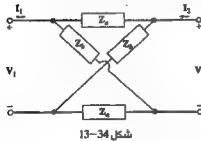
الجواب: $Y_{11} = Y_{22} = 9(s+2)/16$, $Y_{12} = Y_{21} = -3(s+2)/16$

13.30 شبكتان a , b ذات دخلين معاملات الإرسال T_a , T_b موصلتان بتتابع (شكل 13-14) بحيث أوجد معاملات T للشبكة الناتجة ذات المدخلين.

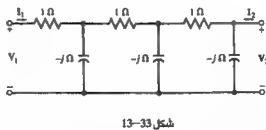
الجواب: $A = A_a A_b + B_a C_b$, $B = A_a B_b + B_a D_b$, $C = C_a A_b + D_a C_b$, $D = C_a B_b + D_a D_b$

13.31 أوجد معاملات T ومعاملات Z للشبكة في شكل 13-33 علماً بأن معاوقات المكثفات معطاه. ملحوظة: استخدم قاعدة التتابع.

الجواب: $A = 5j - 4$, $B = 4j + 2$, $C = 2j - 4$, and $D = 3j$, $Z_{11} = 1.3 - 0.6j$, $Z_{22} = 0.3 - 0.6j$, $Z_{12} = Z_{21} = -0.2 - 0.1j$



شكل 13-34



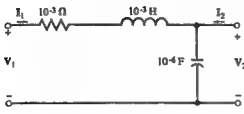
شكل 13-33

13.32 أوجد معاملات Z للدائرة ذات المدخلين لشكل 13-34.

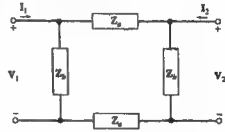
الجواب: $Z_{11} = Z_{22} = \frac{1}{2}(Z_a + Z_b)$, $Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{2}(Z_b - Z_c)$

13.33 أوجد معاملات Z للدائرة ذات المدخلين لشكل 13-35.

الجواب: $Z_{11} = Z_{22} = \frac{1}{2} \frac{Z_o(2Z_o + Z_g)}{Z_o + Z_g}$, $Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{2} \frac{Z_o^2}{Z_o + Z_g}$



شكل 13-36



شكل 13-35

13.34 بالرجوع للدائرة ذات المدخلين لشكل 13-36 أوجد معاملات T لدالة ω وحدد قيمها عند

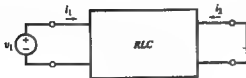
$\omega = 1, 10^3, 10^6 \text{ rad/s}$

الجواب: $A = 1 - 10^{-9}\omega^2 + j10^{-9}\omega$, $B = 10^{-3}(1 + j\omega)$, $C = 10^{-6}j\omega$, and $D = 1$. At $\omega = 1 \text{ rad/s}$, $A = 1$, $B = 10^{-3}(1 + j)$, $C = 10^{-6}j$, and $D = 1$. At $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$, $A = 1$, $B = j$, $C = 10^{-3}j$, and $D = 1$. At $\omega = 10^6 \text{ rad/s}$, $A = -10^3$, $B = 10^3j$, $C = j$, and $D = 1$.

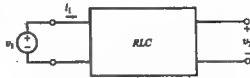
13.35 شبكة ذات مدخلين تحتوي على مقاومة ومكثفات وملفات فقط. وعند فتح المدخل 2 \neq

[شكل 13-37(a)] استخدم جهد الوحدة السلمي $v_1 = u(t)$ ونتج عنه التيار $i_1 = e^{-t}u(t)$ ، $v_2 = (1 - e^{-t})\mu(t)$ (V) وعند قصر المدخل 2 \neq [شكل 13-37(b)] فإن جهد الوحدة السلمي $v_1 = u(t)$ أعطى التيار $i_1 = 0.5(1 + e^{-2t})u(t)$ (μA) أوجد i_2 ومكافئ T للشبكة.

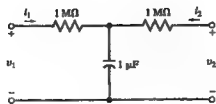
الجواب: $i_2 = 0.5(-1 + e^{-2t})u(t)$ [see Fig. 13-37(c)]



(a)



(b)



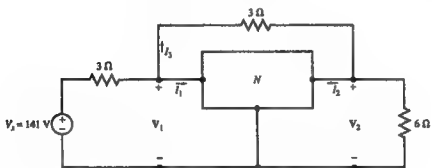
(c)

شكل 13-37

13.36 تعرف الشبكة N ذات المدخلين لشكل 13-38 بالمعاوقات التالية $Z_{11} = 2$ ، $Z_{12} = Z_{21} = 1$ ، $Z_{22} = 4$. أوجد I_1 ، I_2 ، و I_3 .

$I_1 = 24 \text{ A}$, $I_2 = 1.5 \text{ A}$, and $I_3 = 6.5 \text{ A}$.

الجواب :



شكل 13-38

الفصل الرابع عشر

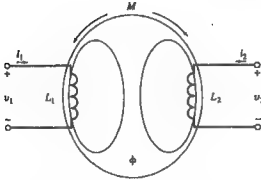
الحث المتبادل والمحولات

14.1 الحث المتبادل

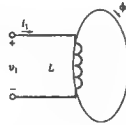
يتناسب المجال λ المتدفق من عضو حثي خطي مصنوع من ملف مع التيار المار به أى أن $LI =$ (انظر شكل 14-1). ومن قانون فارادى فإن الجهد على طرفى العنصر الحثي يكون مساوياً للتفاضل بالنسبة للزمن للمجال الكلى المتدفق أى أنه

$$v = L \frac{di}{dt}$$

والمعامل L بالهنرى H يسمى الحث النفسى للملف .



شكل 14-2



شكل 14-1

وعند وجود موصلين من دائرتين مختلفتين متقاربان لحد ما من بعضهما فإنهما يكونان متقاربان مغناطيسياً للدرجة تعتمد على وضعهما بالنسبة لبعض ومعدل تغير التياران . ويزداد هذا التقارن حين يكون أحد الملفين ملفوف حول الآخر . ويتعاظم هذا التقارن إذا وضع بالإضافة لذلك قلب حد

لين مما يساعد على إمرار المجال المغناطيسى . (ومع ذلك فإن وجود الحديد يمكن أن يتسبب عنه مجال غير خطي).

ولإيجاد علاقة الجهد والتيار على طرفي الملفان المتقارنان كما هو مبين في شكل 14-2 فإننا نلاحظ أن المجال المغناطيسى الكلى المتدفق في كل ملف ينتج من التيارين i_1 ، i_2 وبالتالي فإن تأثير التدفق بين الملفين سيكون متماثل .

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= L_1 i_1 + M i_2 \\ \lambda_2 &= M i_1 + L_2 i_2\end{aligned}\quad (1)$$

حيث M هو الحث المتبادل (بالمهثري H).

ويكون جهدي الأطراف هو التفاضل بالنسبة للزمن للمجال المتدفق .

$$\begin{aligned}v_1(t) &= \frac{d\lambda_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2(t) &= \frac{d\lambda_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}\end{aligned}\quad (2)$$

تكون الملفات المتقارنة حالة خاصة من الشبكة ذات المدخلين التي نوقشت في الفصل 13 وخواص الأطراف (2) والتي يمكن التعبير عنها في مجال التردد أو في مجال s كالتالي :

مجال التردد		مجال s
$\begin{aligned}V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2\end{aligned}\quad (3)$	$\begin{aligned}V_1 &= L_1 s I_1 + M s I_2 \\ V_2 &= M s I_1 + L_2 s I_2\end{aligned}\quad (4)$	

ونناقش معامل التقارن M في بند 14-2 . وتعامل معادلات مجال التردد (3) مع الحالة الجيبية المستقرة . المعادلات (4) في مجال s تفترض أن المتابع أسية مع تردد مركب .

مثال 14.1 : إذا كان $L_1 = 0.1 \text{ H}$ ، $L_2 = 0.5 \text{ H}$ ، $i_1(t) = i_2(t) = \sin \omega t$ في الملفين المتقارنين في شكل 14-2 . أوجد $v_1(t)$ ، $v_2(t)$ لقيم (أ) $M = 0.01 \text{ H}$ ، (ب) $M = 0.2 \text{ H}$ ، (ج) $M = -0.2 \text{ H}$ من (2) .

$$v_1(t) = 0.1\omega \cos \omega t + 0.01\omega \cos \omega t = 0.11\omega \cos \omega t \quad (V) \quad (أ)$$

$$v_2(t) = 0.01\omega \cos \omega t + 0.5\omega \cos \omega t = 0.51\omega \cos \omega t \quad (V)$$

$$v_1(t) = 0.1\omega \cos \omega t + 0.2\omega \cos \omega t = 0.3\omega \cos \omega t \quad (V) \quad (ب)$$

$$v_2(t) = 0.2\omega \cos \omega t + 0.5\omega \cos \omega t = 0.7\omega \cos \omega t \quad (V)$$

$$v_1(t) = 0.1\omega \cos \omega t - 0.2\omega \cos \omega t = -0.1\omega \cos \omega t \quad (V) \quad (ج)$$

$$v_2(t) = -0.2\omega \cos \omega t + 0.5\omega \cos \omega t = 0.3\omega \cos \omega t \quad (V)$$

14.2 معايل التقارن

ملف يحتوي على N لفه بمجال مغناطيسي Φ يتدفق في كل لفه وله مجال مغناطيسي متدفق كلي $e = d\lambda/dt = N(d\Phi/dt)$. ومن قانون فاراداي فإن القوة الدافعة الكهربية emf (الجهود في الملف يكون $e = d\lambda/dt$) وتستخدم إشارة سالبة غالباً في هذه المعادلة للإشارة إلى أن قطبية الجهد تنشأ حسب قانون لينز. ومن تعريف الحث النفسى فإن هذه الجهود يعطى أيضاً بالعلاقة $L(di/dt)$ ولذلك :

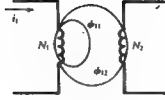
$$L \frac{di}{dt} = N \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{or} \quad L = N \frac{d\Phi}{di} \quad (5a)$$

ووحدة Φ هي الوير حيث $1 \text{ Wb} = 1 \text{ V.s}$ وبالتالي من العلاقة السابقة فإن $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A}$ وسنعتبر خلال هذا الكتاب أن Φ ، i متناسبان مع بعضهما وينتج عن ذلك :

$$L = N \frac{d\Phi}{di} = \text{constant} \quad (5b)$$

المجال الكلى Φ_1 فى شكل 14-3 الناشئ من التيار i_1 من خلال اللفات N_1 يتكون من مجال شارده Φ_{11} ومجال مغناطيسى قارن Φ_{12} . وتكون القوى الدافعة الكهربية emf فى الملف المتقارن هي $N_2(d\Phi_{12}/dt)$. وهذا الجهد نفسه يمكن كتابته باستخدام الحث المتبادل M .

$$e = M \frac{di_1}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} \quad \text{or} \quad M = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{di_1} \quad (6)$$



شكل 3-14

وحيث أن التقارن ثنائي الاتجاه فإن :

$$M = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \quad (7)$$

ويعرف معامل التقارن k بأنه نسبة بين التدفق المؤثر إلى التدفق الكلى .

$$k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{21}}{\phi_2}$$

حيث $0 \leq k \leq 1$. وبأخذ حاصل ضرب (6) ، (7) وباعتبار أن k تعتمد فقط على التركيب الهندسى للنظام فإن :

$$M^2 = \left(N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} \right) \left(N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \right) = \left(N_2 \frac{d(k\phi_1)}{di_1} \right) \left(N_1 \frac{d(k\phi_2)}{di_2} \right) = k^2 \left(N_1 \frac{d\phi_1}{di_1} \right) \left(N_2 \frac{d\phi_2}{di_2} \right) = k^2 L_1 L_2 .$$

$$(8) \quad M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad \text{or} \quad X_M = k\sqrt{X_1 X_2} \quad \text{والتي منها}$$

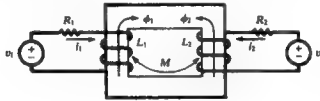
لاحظ أن (8) تشمل القيمة $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ وهي تعنى إمكانية استنتاجها مستقلة بدلالة الطاقة .

إذا قطعت جميع خطوط المجال للمفات بدون أى مجال شارد فإن $k = 1$. ومن ناحية أخرى فإن محاور الملف يمكن أن توجه بحيث لا يكون هناك مجال من أحد الملفات ينتج عنه جهد فى الملف الآخر وبذلك تكون $k = 0$ ويستخدم التعبير التقارن المحكم لبيان الحالة حيث تقطع معظم خطوط القوى للمفات إما باستخدام قلب مغناطيسى لاحتواء المجال أو بوضع لفات الملفات مباشرة أحدهما فوق الآخر والملفات الموضوعة متجاورة مع بعضها وبدون قلب يعتبر تقارنهما ضعيفاً وتكون قيمة الثابت k بالتالى منخفضة .

14.3 تحليل الملفات المتقارنة

القطبية للمتقارن المحكم

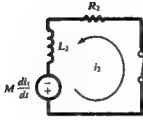
مبين في شكل 14-4 ملفان على نفس القلب الذي يجمع المجال المغناطيسي Φ وينشأ من هذا الوضع ما يسمى بالتقارب المحكم والذي ذكر في بند 14-2 ولتحديد القطبية الصحيحة لجهد الحث المتبادل نستخدم قاعدة اليد اليمنى لكل ملف فإذا التفت الأصابع في اتجاه التيار المفترض فإن الإبهام يشير إلى اتجاه المجال والاتجاهات الموجبة الناتجة لكل من Φ_1 ، Φ_2 مبيّنة في الشكل . وإذا كان المجال Φ_1 ، Φ_2 في نفس الاتجاه فإن إشارات (قطبية) جهد الحث المتبادل ستكون هي نفسها لجهد الحث النفسى وبذلك فإن الإشارة الموجبة ستكتب في الأربع معادلات (2) ، (3) . وفي شكل 14-4 فإن Φ_1 ، Φ_2 تكون متعاكسة وبالتالي فإن المعادلتين (2) ، (3) ستكتبان بالإشارة السالبة .



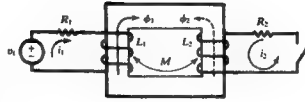
شكل 14-4

التيار الطبيعي

ويمكن فهم الملفات المتقارنة أيضاً من اعتبار مسار ثانى غير فعال كما في شكل 14-5 . والنوع v_1 يدفع التيار i_1 مع المجال الناتج Φ_1 كما هو مبين . ويقرر قانون لينز أن قطبية الجهد المستحث في الدائرة الثانية يكون بحيث إذا أكملت الدائرة سيمر تيار في الملف الثانى في اتجاه بحيث ينشأ عنه مجالاً معاكساً للمجال الأسمى الناتج من i_1 . أى أنه حينما يقفل المفتاح في شكل 14-5 فإن المجال Φ_2 سيكون له الإتجاه المبين . قانون اليد اليمنى مع إشارة الإبهام في اتجاه Φ_2 يعطى إتجاه التيار الطبيعى i_2 . ويكون الجهد المستحث هو الجهد المؤثر في الدائرة الثانية كما هو مبين في شكل 14-6 وهذا الجهد سيكون موجوداً (سواء أقفلت الدائرة أم لا . وحينما يقفل المفتاح فإنه ينشأ التيار i_2 بإتجاهه الموجب المبين .



شكل 14-6



شكل 14-5

مثال 14.2 : افترض أن المفتاح في الحلقة الغير فعالة كما مقفلاً عند اللحظة $(t = 0)$ لقيم $t > 0$ فإن تعاقب هذه الحلقة سيكون (انظر شكل 14-6).

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = 0$$

بينما يكون بالنسبة للحلقة الفعالة :

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = v_1$$

وبكتابة المعادلتين السابقتي في مجال s مع الحالات الابتدائية $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$ وبحذف $i_1(s)$ نجد أن :

$$H(s) = \frac{\text{response}}{\text{excitation}} = \frac{I_2(s)}{V_1(s)} = \frac{Ms}{(L_1 L_2 - M^2)s^2 + (R_1 L_2 + R_2 L_1)s + R_1 R_2}$$

ومن أقطاب $H(s)$ نحصل على الترددات الطبيعية للتيار i_2 .

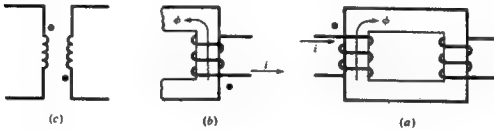
14.4 قاعدة النقطة

إشارة جهد الحث المتبادل يمكن تحديدها إذا كان اتجاه اللف كما هو موضح بالدائرة في شكل 14-4 ، ولتبسيط مسألة الحصول على الاتجاه الصحيح (الإشارة الصحيحة) فإن الملفات توضع عليها علامة نقط عند الأطراف التي تكون لها نفس القطبية في نفس اللحظة .

ولتحديد النقط لزوج الملفات المتقارنة نختار اتجاه التيار في أحد الملفين ونضع نقطة عند الطرف الذي يدخل فيه التيار إلى الملفات . ثم نحدد المجال الناشئ بتطبيق قاعدة اليد اليمنى [انظر شكل

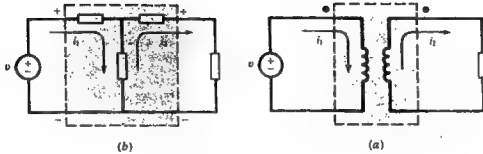
(a) 14-7]. وبالتالي فإن المجال في الملف الآخر تبعاً لقانون لينز سيكون عكس المجال الأول. ثم استخدم قاعدة اليد اليمنى لإيجاد اتجاه التيار الطبيعي المناظر لهذا المجال الثاني [انظر شكل 14-7(b)]. والآن ضع نقطة على طرف الملف الثاني حيث يخرج التيار من الملف ويكون هذا الطرف موجباً في نفس اللحظة التي يدخل فيها التيار لطرف الملف الأول حيث يكون هو الآخر موجب. وعند استخدام القطبية اللحظية لأطراف الملفات المتقارنة عن طريق وضع النقط فإن تمثيل الملفات مع القلب اللازم لها لم يعد من الأهمية بمكان وليس مطلوباً وبذلك يمكن بيان الملفات المتقارة كما في شكل 14-7(c). وتستخدم قاعدتي العقدة كما يلي:

- (1) حينما يكون كلا التياران داخلياً أو خارجياً من زوج من الملفات المتقاون عن طريق الأطراف المنقوطة فإن إشارات كلا من M و L ستكون واحدة ولكن
- (2) إذا دخل التيار عن طريق طرف منقوط بينما يخرج من الطرف المنقوط الآخر فإن إشارات M ستكون مخالفة لإشارات L .



شكل 14-7

مثال 14.3: تم اختيار اتجاهات التيار في شكل 14-8(a) بحيث أن الإشارات على M تكون مخالفة لإشارات L وتبين النقط الأطراف التي لها نفس القطبية في نفس اللحظة. قارن ذلك بالدائرة الموصلة لشكل 14-8(b) والتي بها يمر تيارا الشبكة خلال عنصر مشترك في اتجاهين متضادين والتي فيها تكون علامات القطبية هي نفسها مثل النقط في الدائرة المتقارنة مغناطيسياً ويصبح التشابه أكثر وضوحاً بتظليل الأجزاء الوسطى للشكليين كما هو مبين.



شكل 14-8

14.5 الطاقة المخزنة في زوج من الملفات المتقارنة

الطاقة للمختزنة في عنصر حتى واحد L يحمل التيار i هي $0.5Li^2$ بينما تكون الطاقة المخزنة في ملفين متقارنين هي:

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (9)$$

حيث L_1 ، L_2 معامل الحث للملفين، M هي الحث المتبادل لهما. والحد $M i_1 i_2$ في بند (9) يمثل الطاقة بالنسبة لتأثير الحث المتبادل وتكون إشارة هذا الحث هي (أ) موجبة إذا كان كلا التياران i_1 ، i_2 يدخلان إما في طرفين منقوتين أو طرفين غير منقوتين. (ب) سالبة إذا دخل أحد التياران من طرف منقوت ودخل الآخر من طرف غير منقوت.

مثال 14.4 : زوج من الملفات $L_1 = 0.1 \text{ H}$ ، $L_2 = 0.2 \text{ H}$ وكان في نفس اللحظة $i_1 = 4 \text{ A}$ ، $i_2 = 10 \text{ A}$. أوجد الطاقة الكلية في الملفين إذا كان معامل التقارن M هو 0.1 H (أ)، $\sqrt{2}/10 \text{ H}$ (ب)، -0.1 H (ج)، $-\sqrt{2}/10 \text{ H}$ (د). من (9)

$$(a) W = (0.5)(0.1)4^2 + (0.5)(0.2)10^2 + (0.1)(4)(10) = 14.8 \text{ J}$$

$$(b) W = 16.46 \text{ J}$$

$$(c) W = 6.8 \text{ J}$$

$$(d) W = 5.14 \text{ J}$$

نحدد القيمة العظمى والصغرى للطاقة مع وجود معامل تقارن موجب تماماً ($M = \sqrt{2/10}$) ومعامل تقارن سالب تماماً ($M = -\sqrt{2/10}$).

14.6 الدوائر المكافئة المتقارنة الموصلة

من معادلات تيار الشبكة المكتوب للملفات المتقارنة مغناطيسياً فإنه يمكن إنشاء دائرة موصلة مكافئة لدائرة التقارن وإذا اعتبرنا الدائرة الجيبية المستقرة لشكل 14-9(a) مع تيارات الشبكة المبينة فإن المعادلات المناظرة في صورة المصفوفة هي:

$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

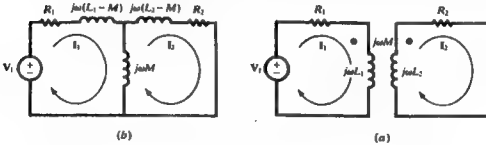
وفي شكل 14-9(b) فإن الممانعة الحثية $X_M = \omega M$ تحمل تيارى الشبكة في اتجاهين متضادين وبذلك:

$$Z_{12} = Z_{21} = -j\omega M$$

في مصفوفة Z . والآن إذا وضعنا عنصر حثي M - L_1 في الحلقة الأولى فإن معادلة تيار الشبكة لهذه الحلقة سيكون:

$$(R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega M I_2 = V_1$$

وبالمثل فإن L_2 - M في الحلقة الثانية ينتج عنه نفس معادلة تيار الشبكة كما في دائرة ملف متقارن. وبالتالي فإن الدائرتين تكونان متكافئتان. ولسنا في حاجة لاستخدام قاعدة النقطة في الدائرة المتقارنة الموصلة وبذلك يمكن استخدام الطرق المألوفة للحل.



شكل 14-9

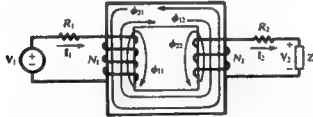
14.7 المحول الخطى

المحول هو نبيلة تقوم بعمل التقارن المتبادل بين اثنين أو أكثر من الدوائر الكهربائية. ومصطلح «محول ذو قلب حديدي» يبين أن الملفات تكون متقارنة تلف على قلب مغناطيس من رقائق الصلب الخاص لاحتواء المجال وجعل التقارن أكبر ما يمكن. والمحولات ذات القلب الهوائي توجد في التطبيقات الإلكترونية والاتصالات. ومجموعة ثالثة تتكون من ملفات ملفوفة فوق بعضها البعض على مادة غير معدنية مع شريحة مغناطيسية متحركة في الوسط لتغيير التقارن.

ويجب ملاحظة بالنسبة للمحولات ذات القلب الحديدي حيث الانفاذية للم الحديد تعتبر ثابتة في مدى تغير قيم الجهد والتيار. وذلك في الغالب مقصور للمحولات ذات الملفين ولو أنه من المعتاد أيضاً وجود ثلاث أو أربع ملفات على نفس القلب.

في شكل 14-10 وصل الملف الابتدائي ولفاته N_1 إلى جهد المنبع V_1 ، ملفات الثانوى وعدد لفاته N_2 وصل للحمل ذو المعاوقة Z_L ومبين مقاومات الملفات كقيم منفصلة R_1 ، R_2 . التيار الطبيعي I_2 ينشأ عنه المجال $\Phi_{22} + \Phi_{12}$ ويدلالة معامل التقارن k .

$$\phi_{11} = (1 - k)\phi_1 \quad \phi_{22} = (1 - k)\phi_2$$



شكل 14-10

من علاقات المجال فإنه يمكن إيجاد علاقة للحث الهارب بالنسبة للحث النفسى.

$$L_{11} = (1 - k)L_1 \quad L_{22} = (1 - k)L_2$$

وبالتالى فإن الممانعة الهاربة ستكون:

$$X_{11} = (1 - k)X_1 \quad X_{22} = (1 - k)X_2$$

ويمكن بيان أن معامل الحث L للملف ذو N لفة يكون متناسباً مع N^2 وبالتالي فإنه بالنسبة للملفين ملفوفين على نفس القلب .

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \quad (10)$$

المجال المشترك لكلا الملفين في شكل 10-14 هو المجال $\phi_m = \phi_{12} - \phi_{21}$ هذا المجال يستتج من قيمة emfs بقانون فراهي .

$$e_1 = N_1 \frac{d\phi_m}{dt} \quad e_2 = N_2 \frac{d\phi_m}{dt}$$

وبتعريف نسبة التحويل $N_1/N_2 = a$ نحصل على هذه المعادلة الأساسية للمحول الخطى .

$$\frac{e_1}{e_2} = a \quad (11)$$

وفي مجال التردد $E_1/E_2 = a$

والعلاقة بين المجال المتبادل والحث المتبادل يمكن الحصول عليه بتحليل emf والمستتجة في الثانوي كالتالى :

$$e_2 = N_2 \frac{d\phi_m}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} - N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} - N_2 \frac{d(k\phi_2)}{dt}$$

باستخدام (6) ، (5a) يمكن كتابة السابق كما يلى :

$$e_2 = M \frac{di_1}{dt} - kL_2 \frac{di_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} - \frac{M}{a} \frac{di_2}{dt}$$

حيث تشمل الخطوة الأخيرة (8) ، (10) .

$$M = k\sqrt{(a^2 L_1)(L_2)} = kaL_2$$

والآن يمكن تعريف تيار المغنطة ϕ بالمعادلة :

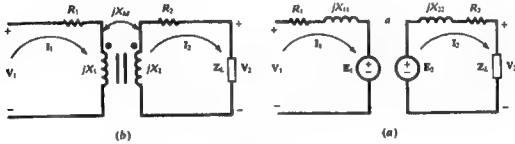
$$i_1 = \frac{i_2}{a} + i_\phi \quad \text{or} \quad I_1 = \frac{I_2}{a} + I_\phi \quad (12)$$

لدينا

$$e_2 = M \frac{di_\phi}{dt} \quad \text{or} \quad E_2 = jX_M I_\phi \quad (13)$$

تبعاً للمعادلة 13 فإنه يمكن اعتبار تيار المغنطة أنه يتسبب في المجال المتبادل Φ_m في القلب .

وباعتبار القوة الدافعة للملف والممانعة الهاربة ، يمكن رسم دائرة مكافئة للمحول الخطى حيث يكون الملف الابتدائي والملف الثانوي متقارنان فعلياً . وهذا مبين في شكل (a) 14-11 وللمقارنة فإن الدائرة المكافئة المنقوطة المبينة في شكل (b) 14-11 .



شكل 14-11

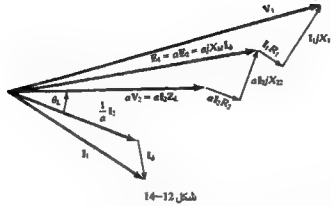
مثال 15.4 : ارسم شكل متجهات للجهد والتيار المناظر لشكل 14-11(a) ومنه أوجد معاوقة الدخول للمحول .

شكل متجهات مبين في شكل 14-12 وفيه θ_L تعبر عن زاوية الوجه للقيمة Z_L لاحظ أنه بالرجوع للمعادلة (13) فإن emfs المستنتجة E_2 ، E_1 تتقدم تيار المغنطة I_ϕ بالزاوية 90° ويشمل الشكل الثلاث معادلات المتجهة .

$$\begin{aligned} V_1 &= a jX_m I_\phi + (R_1 + jX_{11}) I_1 \\ jX_m I_\phi &= (Z_L + R_2 + jX_{22}) I_2 \\ I_1 &= \frac{1}{a} I_2 + I_\phi \end{aligned}$$

ويحذف I_2 ، I_ϕ من هذه المعادلات ينتج :

$$\frac{V_1}{I_1} = Z_{in} = (R_1 + jX_{11}) + a^2 \frac{(jX_m/a)(R_2 + jX_{22} + Z_L)}{(jX_m/a) + (R_2 + jX_{22} + Z_L)} \quad (14a)$$



شكل 14-12

وإذا استخدم بدلا لذلك معادلات تيار الشبكة لشكل (b) 14-11 لإيجاد Z_{in} .

$$Z_{in} = R_1 + jX_1 + \frac{X_M^2}{R_2 + jX_2 + Z_L} \quad (14b)$$

ويمكن للقارئ التحقق من التكافؤ بين (14a)، (14b) انظر المسألة 14-36.

14.8 المحول المثالي

يعتبر المحول المثالي افتراضياً حيث لا وجود له وهو الخالي من المفايد والانفاذية له ما لا نهاية ويتبع عن ذلك تقارن كامل بدون مجال هارب. وفي محولات القدرة الكبيرة تكون المفايد صغيرة بالنسبة لقدرة المحول نفسه حيث تعتبر العلاقات المستخدمة في المحول المثالي قريبة الاستخدام لهذه المحولات في التطبيقات الهندسية.

وبالرجوع لشكل 14-13 فإن حالات المفايد تعطى بالعلاقة:

$$\frac{1}{2} V_1 I_1^* = \frac{1}{2} V_2 I_2^*$$

(انظر بند 10-7) ولكن:

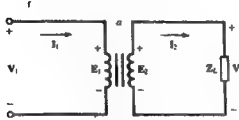
$$V_1 = E_1 = aE_2 = aV_2$$

حيث القيمة a حقيقية.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = a \quad (15)$$

ونحصل على قدرة الدخل من العلاقات :

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{aV_2}{I_2/a} = a^2 \frac{V_2}{I_2} = a^2 Z_L \quad (16)$$



شكل 13-14

مثال 14.6 : يعتبر المحول المثالى هو الحـد الذى يصل إليه المحول الحـظى بـند 7-14 وبالتالى فى (14a) ضع .

$$R_1 = R_2 = X_{11} = X_{22} = 0$$

(حيث لا توجد مفايد) ويفرض $X_m \rightarrow \infty$ (إنفاذية القلب ما لا نهاية) لنحصل على :

$$Z_{in} = \lim_{X_m \rightarrow \infty} \left[a^2 \frac{(jX_m/a)(Z_L)}{(jX_m/a) + Z_L} \right] = a^2 Z_L$$

وهى تتفق مع (16).

قاعدة نقطة الأمبير لفة

حيث أن $a = N_1/N_2$ فى (15).

$$N_1 I_1 = N_2 I_2$$

أى أن الأمبير لفات فى الابتدائى مساوية للأمبير لفات للثانوى . ويمكن استنتاج قاعدة لتسرى على المحولات التى تحتوى على أكثر من ملفين . ونستخدم الإشارة الموجبة لحاصل ضرب الأمبير لفة إذا دخل التيار للملف من الطرف ذو النقطة وتوضح الإشارة السالبة إذا خرج التيار من الطرف ذو النقطة . وبالتالى فإن قاعدة نقطة الأمبير لفة تقرر أن المجموع الجبرى للأمبير لفات للمحول صفراً .

مثال 14.7 : للمحول ذو الثلاث ملفات المبين شكل 14-14 له $N_1 = 20$ ، $N_2 = N_3 = 10$ ، أو جد I_1

إذا كان $I_2 = 10.0 \angle -53.13^\circ$ A ، $I_3 = 10.0 \angle -45^\circ$ A .

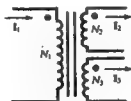
وباعتبار النقط وإتجاهات التيار المبين في الشكل فإن :

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 - N_3 I_3 = 0$$

ومنها

$$20 I_1 = 10(10.0 \angle -53.13^\circ) + 10(10.0 \angle -45^\circ)$$

$$I_1 = 6.54 - j7.54 = 9.98 \angle -49.06^\circ \text{ A}$$



شكل 14-14

14.9 المحول الذاتي

المحول الذاتي هو محول ذو ملف واحد ملفوف على قلب حديدي بحيث يحتوى على واحد أو أكثر من أطراف التوصيل . وتوصل أحد الدوائر بطرفي نهاية الملف بينما توصل الأخرى بأحد طرفي النهاية والنقطة البينية للملف .

وبالرجوع لشكل (a) 14-15 فإن نسبة التحويل للمحول تكون :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} = a + 1$$

والتي تزيد بواحد عن نسبة التحويل للمحول المثالي ذو الملفين الذي له نفس نسبة الملفات . ويتيح عن التيار I_1 المار في الجزء العلوي أو التوالى ذو الملفات N_1 المجال Φ_1 . ويقانون لينز فإن التيار الطبيعي في الجزء السفلى للملف ينتج عنه مجال مضاد Φ_2 . وبالتالي فإن التيار I_H يخرج من الجزء السفلى من النقطة البينية . ومبين في شكل (b) 14-15 موضع النقط على الملف . وفي المحول المثالي الذاتي «كمحول مثالي» فإن كلا القدرة المركبة للدخل والخروج متساويان .

$$\frac{1}{2} V_1 I_1^* = \frac{1}{2} V_1 I_{ab}^* = \frac{1}{2} V_2 I_L^*$$

$$\frac{I_L}{I_{ab}} = a + 1$$

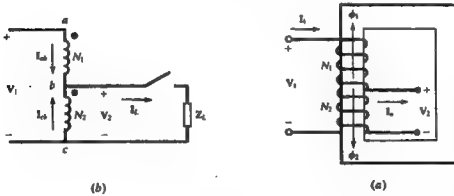
وبالتالى

أى أن التيارات أيضاً لها نفس نسبة التحويل .

حيث $I_L = I_{ab} + I_{cb}$ فإن قدرة الفرج المركبة تتكون من جزئين :

$$\frac{1}{2} V_2 I_L^* = \frac{1}{2} V_2 I_{ab}^* + \frac{1}{2} V_2 I_{cb}^* = \frac{1}{2} V_2 I_{ab}^* + a(\frac{1}{2} V_2 I_{ab}^*)$$

ويعزى الحد الأول على اليمين للتوصيل والثانى للحث . وللك فأنه يوجد تقارن توصيل وتقارن مغناطيسى بين المتبق والحمل فى المحول النفسى .



شكل 14-15

14.10 المعاوقة المنعكسة

يساهم الحمل Z_L المتصل فى طرفى الثانوى للمحول كما فى شكل 14-16 فى قيمة معاوقة الدخل . وهذه المساهمة تسمى المعاوقة المنعكسة وباستخدام خواص الأطراف للملفين المتقارنين وباستخدام قانون KVL حول حلقة الثانوى نجد :

$$V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$$

$$0 = M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} + Z_L I_2$$

ويحذف I_2 نحصل على:

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = L_1 s - \frac{M^2 s^2}{Z_2 + L_2 s} \quad (17)$$

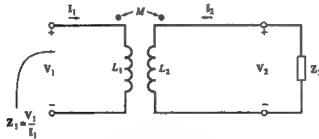
وفى حالة التيار المتردد المستقر حيث $s = j\omega$ نحصل على:

$$Z_1 = j\omega L_1 + \frac{M^2 \omega^2}{Z_2 + j\omega L_2} \quad (18)$$

وتكون المعاوقة المنعكسة:

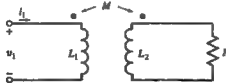
$$Z_{\text{reflected}} = \frac{M^2 \omega^2}{Z_2 + j\omega L_2} \quad (19)$$

والحمل Z_2 من ناحية المتبق يكون $M^2 \omega^2 / (Z_2 + j\omega L_2)$ ، ونستخدم هذه الطريقة غالباً لتغيير المعاوقة لقيمة معينة وذلك لتوازم الحمل مع المتبق مثلاً.



شكل 14-16 .

مثال 14.8 : إذا كان $L_1 = 0.2 \text{ H}$ ، $L_2 = 0.1 \text{ H}$ ، $M = 0.1 \text{ H}$ ، $R = 10 \Omega$ فى الدائرة شكل 14-17 . أوجد i_1 لقيمة $v_1 = 142.3 \sin 100t$.



شكل 14-17 .

The input impedance Z_1 at $\omega = 100$ is [see (18)]

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = j\omega L_1 + \frac{M^2 \omega^2}{Z_2 + j\omega L_2} = j20 + \frac{0.01(10000)}{10 + j10} = 5 + j15 = 5\sqrt{10}/71.6^\circ$$

Then,

$$I_1 = V_1/Z_1 = 9/-71.6^\circ \text{ A}$$

or

$$i_1 = 9 \sin(100t - 71.6^\circ) \text{ (A)}$$

مثال 14.9 : ضع $v_1 = u(t)$ بالرجوع لمثال 8-14. أوجد i_1 وهو التجاوب القصرى.

معاوقة الدخل [انظر (17)].

$$Z_1(s) = L_1 s - \frac{M^2 s^2}{R + L_2 s}$$

وبالتعويض بالقيم المعطاه للمعاصر نحصل على:

$$Z_1(s) = \frac{s(s + 200)}{10(s + 100)} \quad \text{or} \quad Y_1(s) = \frac{10(s + 100)}{s(s + 200)}$$

لقيم $t > 0$ ، الدخل $v_1 = 1 \text{ V}$ هو قيمة أسية e^{st} والتى فيها $s = 0$ هو قطب للدالة $Y_1(s)$ وبالتالي فإن $i_{1,f} = kt$ حيث $k = 1/L_1 = 5$. ويمكن الحصول مباشرة على هذه النتيجة بتحليل الدائرة شكل 14-17 للتيار المستمر .

مسائل محلولة

14.1 إذا كان تيار أحد الملفين المتقارنين مغناطيسياً هو 5.0 A فإن المجالين الناتجين ϕ_{11} ، ϕ_{12} يكونان 0.2 mWb ، 0.4 mWb على الترتيب فإذا كانت اللفات هي $N_1 = 500$ ، $N_2 = 1500$ فأوجد L_1 ، L_2 ، M ومعامل التقارن k .

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = 0.6 \text{ mWb} \quad L_1 = \frac{N_1 \phi_1}{I_1} = \frac{500(0.6)}{5.0} = 60 \text{ mH}$$

$$M = \frac{N_2 \phi_{12}}{I_1} = \frac{1500(0.4)}{5.0} = 120 \text{ mH} \quad k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = 0.667$$

Then, from $M = k\sqrt{L_1 L_2}$, $L_2 = 540 \text{ mH}$.

14.2 إذا كان معامل الحث الذاتي للمفاتيح متقارنين هما $L_1 = 50 \text{ mH}$ ، $L_2 = 200 \text{ mH}$ ومعامل التقارن هو $k = 0.50$ وإذا كان الملف 2 له 1000 لفة $i_1 = 5.0 \sin 400t$ ، أوجد الجهد على طرفي الملف 2 والمجال Φ_1 .

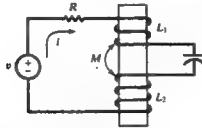
$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.50\sqrt{(50)(200)} = 50 \text{ mH}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} = 0.05 \frac{d}{dt} (5.0 \sin 400t) = 100 \cos 400t \text{ (V)}$$

وبفرض كالعادة أن الدائرة ذات تغير مغناطيسي خطي فإن:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1} = \frac{N_2 (k \Phi_1)}{i_1} \quad \text{or} \quad \Phi_1 = \left(\frac{M}{N_2 k} \right) i_1 = 5.0 \times 10^{-4} \sin 400t \text{ (Wb)}$$

14.3 استخدم KVL لدائرة التوالي لشكل 14-18 .



شكل 14-18

وباختبار طريقة لف الملف نجد أن إشارات الحدود M مخالفة لإشارات حدود L .

$$Ri + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = v$$

$$Ri + L' \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = v$$

حيث $L' = L_1 + L_2 - 2M$ لأن

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \leq \frac{L_1 + L_2}{2}$$

L' ليست سالبة

14.4 في توصيلة توالي مساعدة فإن ملفين متقارنان لهما حث مكافئ L_A في توصيلة توالي متضادة

L_B . أوجد علاقة لقيمة M بدلالة L_A ، L_B .

كما في المسألة 14-3 .

$$L_1 + L_2 + 2M = L_n \quad L_1 + L_2 - 2M = L_n$$

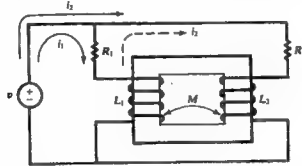
والتي تعطى

$$M = \frac{1}{4}(L_n - L_n)$$

وهذه المسألة تقترح طريقة يمكن بها إيجاد M معملياً .

14.5 (أ) أكتب معادلات تيارات الشبكة للملفين المتقارنين بالتيارين i_1 ، i_2 الميين شكل 14-9 . (ب)

أعد الحل لقيمة i_2 كما هو مبين بالسهم المنقوط .



شكل 14-19

(أ) ومن طريقة لف الملف والاتجاهات المختارة يتبع إشارات حدود M كالتالي :

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = v$$

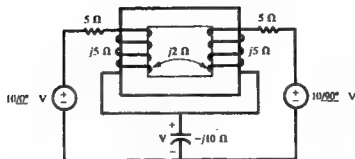
$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = v$$

$$R_1(i_1 - i_2) + L_1 \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = v \quad (\text{ب})$$

$$R_1(i_2 - i_1) + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{d(i_2 - i_1)}{dt} + L_1 \frac{d(i_2 - i_1)}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0$$

14.6 أوجد الدائرة المكافئة المنقوطة للدائرة المتقارنة شكل 14-20 . واستخدمها لإيجاد الجهد V على

طرفي المعاوقة السعوية 10Ω .



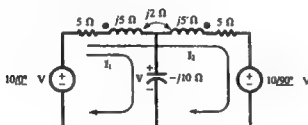
شكل 14-20

ويوضع النقط على الدائرة فإنه يكفى فقط مراعاة الملفات وإتجاه الملف . وأدخل التيار فى الطرف العلوى الأيسر للملف ونضع نقطة على هذا الطرف . وبالتالي فإن المجال المناظر سيكون لأعلى . ويقانون لينز فإن المجال فى الملف الأيمن يجب أن يكون لأعلى ليواجه المجال الأول . وبالتالي فإن التيار الطبيعى سيتحرك هذا الملف عن طريق الطرف العلوى والذى عليه علامة النقطة . ولتحصل على الدائرة المكافئة المنقوطة الكاملة انظر شكل 14-21 ومع اختيار التيارين I_1 ، I_2 لحساب V .

$$\begin{bmatrix} 5 - j5 & 5 + j3 \\ 5 + j3 & 10 + j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ \\ 10 - j10 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 5 + j3 \\ 10 - j10 & 10 + j6 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = 1.015 / 113.96^\circ \text{ A}$$

$$\text{and } V = I_1(-j10) = 10.15 / 23.96^\circ \text{ V.}$$

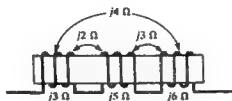


شكل 14-21

14.7 أوجد المكافئ المنقوط للدائرة المبينة شكل 14-27 واستخدم هذا المكافئ لإيجاد المعاوقة الحثية المكافئة.



شكل 14-23



شكل 14-22

أدخل تياراً في الملف الأول وضع نقطة حيث يدخل هذا التيار وينشئ التيار الطبيعي في كلا الملفين الآخرين مجالاً مضاداً لذلك الناتج عن التيار الداخل . وضع نقطاً في مكان خروج التيار الطبيعي (يمكن لتلافي الارتباك إذا أهمل توصيل التوالي بينما تراعى أماكن النقط) ويكون الناتج في شكل 14-23.

$$Z = j3 + j5 + j6 - 2(j2) + 2(j4) - 2(j3) = j12 \Omega$$

أى أن المعاوقة الحثية 12Ω .

14.8 (أ) أحسب الجهد V للدائرة المقارنة المبينة شكل 14-24 . (ب) أهد الحل مع عكس إشارة أحد الملفين .

(أ) $X_M = (0.8) \sqrt{5(10)} = 5.66 \Omega$ وبالتالي فإن مصفوفة Z تكون :

$$\begin{bmatrix} 3 + j1 & -3 - j1.66 \\ -3 - j1.66 & 8 + j6 \end{bmatrix}$$

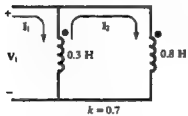
$$\text{Then, } I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 + j1 & 50 \\ -3 - j1.66 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 8.62 / -24.79^\circ \text{ A}$$

$$\text{and } V = I_2(5) = 43.1 / -24.79^\circ \text{ V.}$$

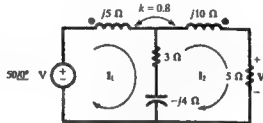
$$[Z] = \begin{bmatrix} 3 + j1 & -3 + j9.66 \\ -3 + j9.66 & 8 + j6 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 + j1 & 50 \\ -3 + j9.66 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = 3.82 / -112.12^\circ \text{ A}$$

$$\text{and } V = I_2(5) = 19.1 / -112.12^\circ \text{ V.}$$



شكل 14-25



شكل 14-24

14.9 أوجد المكافئ الحثي للمملفين المتقارنين الموصليين على التوازي كما في شكل 14-25 .

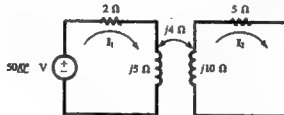
تم اختيار التيارين I_1 ، I_2 كما في الرسم وبالتالي $Z_{in} = V_1/I_1$

$$[Z] = \begin{bmatrix} j\omega 0.3 & j\omega 0.043 \\ j\omega 0.043 & j\omega 0.414 \end{bmatrix}$$

$$\text{and } Z_{in} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}} = \frac{(j\omega 0.3)(j\omega 0.414) - (j\omega 0.043)^2}{j\omega 0.414} = j\omega 0.296$$

or L_{eq} is 0.296 H.

14.10 للدائرة المتقارنة المبينة شكل 11-26 بين أنه لا حاجة للنقط طالما أن الحلقة الثانية غير فعالة .



شكل 14-26

اختير التياران I_1 ، I_2 كما هو مبين .

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & \pm j4 \\ 0 & 5 + j10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + j5 & \pm j4 \\ \pm j4 & 5 + j10 \end{vmatrix}} = \frac{250 + j500}{-24 + j45} = 10.96 / -54.64^\circ \text{ A}$$

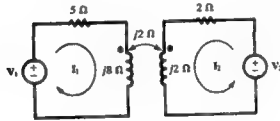
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 + j5 & 50 \\ \pm j4 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_x} = 3.92 / -118.07 \pm 90^\circ \text{ A}$$

لا تتأثر قيمة Δ_x بإشارة M وحيث أن محدد البسط للتيار I_1 لا يشمل معاوقة التقارن فإن I_1 نفسه لا يتأثر أيضاً . وتبين علاقة التيار I_2 أن تغيير إشارة التقارن ينتج عنه إزاحة 180° . وإذا لم يوجد جهد إجهاد آخر في الحلقة الثانية فإن هذا التغيير في زاوية الوجه لا ينتج عنه تغيير .

14.11 للدائرة المقارنة المبينة شكل 14-27 أوجد النسبة V_1/V_2 والتي ينشأ عنها تيار I_1 صفراً .

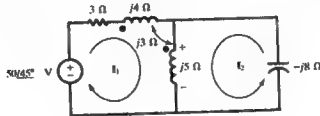
$$I_1 = 0 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & j2 \\ V_2 & 2 + j2 \end{vmatrix}}{\Delta_x}$$

وبالتالي $0 = V_2(j2) - V_1(2 + j2)$ والتي منها $V_2/V_1 = 1 + j1$



شكل 14-27

14.12 في الدائرة لشكل 14-28 . أوجد الجهد على طرفي المعاوقة 5Ω باعتبار الإشارات المبينة .



شكل 14-28

وباختيار تيار الشبكات المين فى الشكل فإن:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50/45^\circ & j8 \\ 0 & -j3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3+j15 & j8 \\ j8 & -j3 \end{vmatrix}} = \frac{150/-45^\circ}{109-j9} = 1.37/-40.28^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 3.66 / -40.28^\circ \text{ A}$$

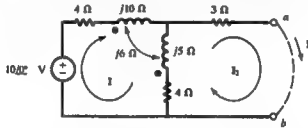
والجهد على طرفى 5z سيكون جزء منه توصيلياً من التيارين I_1 ، I_2 وجزء متبادل من التيار I_1 فى المعاوقة 4Ω .

$$V = (I_1 + I_2)(j5) + I_1(j3) = 29.27/49.72^\circ \text{ V}$$

وبالطبع فإن نفس الجهد سيتواجد على طرفى المكثف .

$$V = -I_2(-j8) = 29.27/49.72^\circ \text{ V}$$

14.13 أوجد الدائرتين المكافئتين لثغتين ونورتون عن الطرفين ab للدائرة المتقارنة المبينة شكل 14-29 .



شكل 14-29

فى الدائرة المفتوحة فإنه توجد حلقة فى إتجاه عقارب الساعة التى بها التيار I المدفوع بجهد منبع .

$$I = \frac{10/0^\circ}{8+j3} = 1.17/-20.56^\circ \text{ A}$$

$$V' = I(5j+4) - I(6) = 40.28^\circ / -34-60^\circ \text{ V}$$

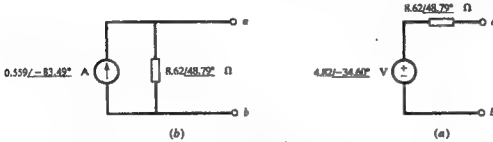
ولإيجاد تيار الدائرة القصيرة I' نعتبر شبكى التيار فى إتجاه عقارب الساعة مع $I_2 = I'$.

$$\mathbf{V}' = \frac{\begin{vmatrix} 8+j3 & 10 \\ -4+j1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8+j3 & -4+j1 \\ -4+j1 & 7+j5 \end{vmatrix}} = 0.559/-83.39^\circ \text{ A}$$

and

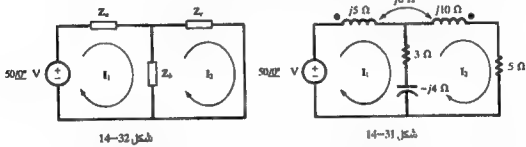
$$\mathbf{Z}' = \frac{\mathbf{V}'}{\mathbf{I}'} = \frac{4.82/-34.60^\circ}{0.559/-83.39^\circ} = 8.62/48.79^\circ \Omega$$

وبيان الدائرتين المكافئتين في شكل 14-30 .



شكل 14-30

14.14 أوجد الدائرة الموصلة المتقارنة المكافئة للدائرة المتقارنة مغناطيسياً المبينة شكل 14-31 .



شكل 14-32

شكل 14-31

اختار تيارى الشبكة \mathbf{I}_1 ، \mathbf{I}_2 المبينة فى الشكل ثم أكتب معادلات KVL بصورة المصفوفة .

$$\begin{bmatrix} 3+j1 & -3-j2 \\ -3-j2 & 8+j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

نختار المعاوقات شكل 14-32 ليعطى مصفوفة \mathbf{Z} المماثلة . هذا لأن كلا من \mathbf{I}_1 ، \mathbf{I}_2 يمران فى المعاوقة المشتركة \mathbf{Z}_0 . نرى إنهما من متضادين وتكون \mathbf{Z}_{12} فى المصفوفة هى $-\mathbf{Z}_0$. وبالتالى فإن $\mathbf{Z}_0 = 3 + j2$. وحيث أن \mathbf{Z}_{11} تحتوى على جميع المعاوقات التى يمر بها \mathbf{I}_1 فإن :

$$3 + j1 = \mathbf{Z}_{11} = (3 + j2)$$

والتي منها $Z_B = -j1 \Omega$ وبالمثل :

$$Z_{23} = 8 + j6 = Z_B + Z_C$$

وأيضاً $Z_C = 5 + j4 \Omega$

14.15 لدائرة المحول شكل (b) 14-11 : $k = 0.96$ ، $R_1 = 1.2 \Omega$ ، $R_2 = 0.3 \Omega$ ، $X_1 = 20 \Omega$ ، $X_2 = 5 \Omega$ ، $Z_L = 5.0 \angle 36.87^\circ \Omega$ ، $V_2 = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$. أوجد E_1 ، E_2 emfs للملف وتيار الحمل I_ϕ .

$$X_{11} = (1 - k)X_1 = (1 - 0.96)(20) = 0.8 \Omega \quad X_{22} = (1 - k)X_2 = 0.2 \Omega$$

$$a = \sqrt{\frac{X_1}{X_2}} = 2 \quad X_M = k\sqrt{X_1 X_2} = 9.6 \Omega$$

والآن يمكن إنشاء دائرة كالتي في شكل (a) 14-11 مبتدئاً بالعلاقات المتجهة للجهد والتيار عند الحمل ورجوعاً للقيم E_2 إلى E_1 .

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_L} = \frac{100/\angle 0^\circ}{5.0/\angle 36.87^\circ} = 20/\angle -36.87^\circ \text{ A}$$

$$E_2 = I_2(R_2 + jX_{22}) + V_2 = (20/\angle -36.87^\circ)(0.3 + j0.2) + 100/\angle 0^\circ = 107.2 - j0.4 \text{ V}$$

$$E_1 = aE_2 = 214.4 - j0.8 \text{ V}$$

$$I_\phi = \frac{E_1}{jX_M} = -0.042 - j11.17 \text{ A}$$

14.16 للمحول الخطي للمسألة 14-15 أحسب معاوقة الدخل على الطرفين حيث نضع الجهد V_1 .

الطريقة 1 :

استكمالاً للتركيب الذي بدأناه في المسألة 14-15 .

$$I_1 = I_\phi + \frac{1}{a}I_2 = (-0.042 - j11.17) + 10/\angle -36.87^\circ = 18.93/\angle -65.13^\circ \text{ A}$$

$$V_1 = I_1(R_1 + jX_{11}) + E_1 = (18.93/\angle -65.13^\circ)(1.2 + j0.8) + (214.4 - j0.8) \\ = 238.2/\angle -3.62^\circ \text{ V}$$

وبذلك

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{238.2/-3.62^\circ}{18.93/-65.13^\circ} = 12.58/61.51^\circ \Omega$$

الطريقة 2 :

من (14a) في المثال 5-14 .

$$Z_{in} = (1.2 + j0.8) + 2^2 \frac{(j4.8)(0.3 + j0.2 + 5.0/36.87^\circ)}{0.3 + j5.0 + 5.0/36.87^\circ}$$

$$= \frac{114.3/123.25^\circ}{9.082/61.75^\circ} = 12.58/61.50^\circ \Omega$$

الطريقة 3 :

من (14b) في المثال 5-14 .

$$Z_{in} = (1.2 + j20) + \frac{(9.6)^2}{0.3 + j5 + 5.0/36.87^\circ}$$

$$= (1.2 + j20) + (4.80 - j8.94) = 12.58/61.53^\circ \Omega$$

14.17 في شكل 14-33 يوجد ثلاث محولات متطابقة بحيث أن الابتدائي متصلاً على شكل Y

والثانوى دلتا . فإذا اتصل به حمل واحد يحمل التيار $I_L = 30 \angle 0^\circ$ A وكان :

$$I_{a2} = 20/0^\circ \text{ A} \quad I_{a2} = I_{a2} = 10/0^\circ \text{ A}$$

وأيضاً $N_1 = 10N_2 = 100$ ، I_{c1} ، I_{b1} ، I_{a1} تيارات الابتدائي

نطبق قاعدة الأمبير لفات المتقوطة لكل محول .

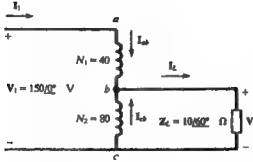
$$N_1 I_{a1} + N_2 I_{a2} = 0 \quad \text{or} \quad I_{a1} = -\frac{10}{100} (10/0^\circ) = -1/0^\circ \text{ A}$$

$$N_1 I_{b1} - N_2 I_{b2} = 0 \quad \text{or} \quad I_{b1} = \frac{10}{100} (20/0^\circ) = 2/0^\circ \text{ A}$$

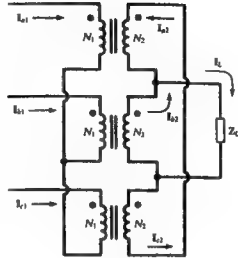
$$N_1 I_{c1} + N_2 I_{c2} = 0 \quad \text{or} \quad I_{c1} = -\frac{10}{100} (10/0^\circ) = -1/0^\circ \text{ A}$$

وللتأكد من النتائج يمكن الحصول على مجموع تيارات الابتدائي .

$$I_{e1} + I_{e2} + I_{e3} = 0$$



شكل 14-34



شكل 14-33

14.18 للمحول النفسى المتالى المبين شكل 14-34 أوجد V_2 ، I_{ab} و تيار الدخل I_1 .

$$a = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{2}$$

$$V_2 = \frac{V_1}{a+1} = 100\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$I_L = \frac{V_2}{Z_L} = 10\angle -60^\circ \text{ A}$$

$$I_{ab} = I_L - I_{ab} = 3.33\angle -60^\circ \text{ A}$$

$$I_{ab} = \frac{I_L}{a+1} = 6.67\angle -60^\circ \text{ A}$$

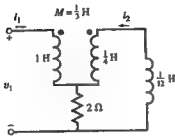
14.19 فى المسألة 14-18 أوجد القدرة الظاهرية المعطاة للحمل بتأثير المحول وتلك المعطاة بالتوصيل .

$$S_{cond} = \frac{1}{2} V_2 I_{ab}^* = \frac{1}{2} (100\angle 0^\circ) (6.67\angle 60^\circ) = 333\angle 60^\circ \text{ VA}$$

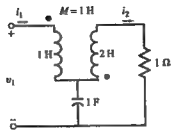
$$S_{load} = a S_{cond} = 167\angle 60^\circ \text{ VA}$$

14.20 للدائرة المتقارنة شكل 14-35 أوجد مساحه الدخل $Y_1 = I_1/V_1$ وحدد التيار $i_1(t)$ للجهد

$$v_1 = 2\sqrt{2} \cos t$$



شكل 14-36



شكل 14-35

استخدم KVL حول الحلقتين 1 ، 2 في مجال s .

$$V_1 = sI_1 + sI_2 + \frac{I_1 - I_2}{s}$$

$$0 = sI_1 + (2s + 1)I_2 + \frac{I_2 - I_1}{s}$$

وبحذف I_2 في هذه المعادلات ينتج :

$$Y_1 = \frac{I_1}{V_1} = \frac{2s^2 + s + 1}{s^3 + s^2 + 5s + 1}$$

وعند $s = j$ فإن مسامحة الدخل $Y_1 = (1 + j)/4 = \sqrt{2}/4 \angle 45^\circ$ وبالتالي $i_1(t) = \cos(t + 45^\circ)$.

14.21 أوجد معاوقة الدخل $Z_1 = V_1/I_1$ في الدائرة المتقارنة شكل 14-36 .

استخدم KVL حول الحلقتين 1 ، 2 في مجال s .

$$\begin{cases} V_1 = sI_1 + \frac{1}{2}sI_2 + 2(I_1 + I_2) \\ 0 = \frac{1}{2}sI_1 + \frac{1}{4}sI_2 + 2(I_1 + I_2) + \frac{1}{12}sI_2 \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} V_1 = (2 + s)I_1 + (2 + \frac{1}{2}s)I_2 \\ 0 = (2 + \frac{1}{2}s)I_1 + (2 + \frac{1}{2}s)I_2 \end{cases}$$

ويكون الناتج :

$$I_2 = -I_1 \quad \text{and} \quad Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{2}{3}s$$

التيار المار في المقاومة هو $I_1 + I_2 = 0$ وليس لها أى تأثير على Z_1 وبذلك فإن معاوقة الدخل حثية خالصة .

مسائل إضافية

14.22 ملفان متقارنان $L_1 = 0.8 \text{ H}$ ، $L_2 = 0.2 \text{ H}$ لهما معامل تقارن $k = 0.90$. أوجد الحث المتبادل M ونسبة الملفات N_1/N_2 . الجواب 2 , 0.36 H .

14.23 ملفان متقارنان $N_1 = 100$ ، $N_2 = 800$ لهما معامل تقارن $k = 0.85$ مع فتح الملف ١ ومرور تيار 0.5 A فى الملف 2 كان المجال $\Phi_2 = 0.35 \text{ mWb}$. أوجد L_1 ، L_2 ، M .
الجواب : 0.875 mH , 56 mH , 5.95 mH .

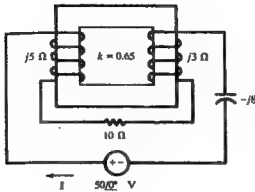
14.24 ملفان متطابقان متقارنان لهما حث مكافئ قيمته 80 mH حينما يتصلان على التوالى بمجال مضاف والقيمة 35 mH حينما يتصلان على التوالى بمجال مضاد . أوجد L_1 ، L_2 ، M ، k .
الجواب : 0.392 , 11.25 mH , 28.8 mH , 28.8 mH .

14.25 ملفان متقارنان لهما $L_1 = 20 \text{ mH}$ ، $L_2 = 10 \text{ mH}$ ، $k = 0.50$ متصلان بأربع طرق : توالى مضاف وتوالى مضاد وتوازى مضاف وتوازى مضاد . أوجد الحث المكافئ للأربع توصيلات .
الجواب : 3.39 mH , 9.47 mH , 15.9 mH , 44.1 mH .

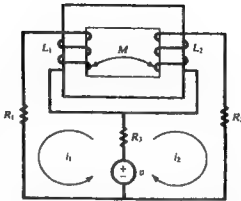
14.26 أكتب معادلات تيارات الشبكة للدائرة المتقارنة المبينة شكل 14-37 . أوجد الدائرة المكافئة المنقوطة وأكتب نفس المعادلات .

$$\text{Ans. } (R_1 + R_3)I_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_3 I_2 + M \frac{di_2}{dt} = v$$

$$(R_2 + R_3)I_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_3 I_1 + M \frac{di_1}{dt} = v$$



شكل 14-38



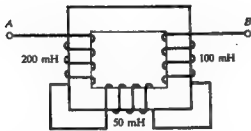
شكل 14-37

14.27 أكتب المعادلة المتجهة للدائرة المتقارنة ذات الحلقة الواحدة لشكل 14-38 .

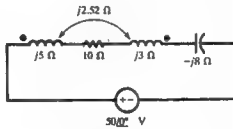
الجواب: $(j5 + j3 - j5.03 - j8 + 19) I = 50 \angle 0^\circ$.

14.28 أوجد الدائرة المكافئة المنقوطة للدائرة المتقارنة لشكل 14-38 .

الجواب: انظر شكل 14-39 .



شكل 14-40



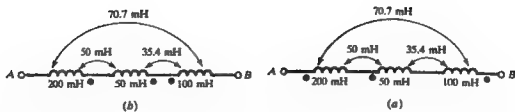
شكل 14-39

14.29 للثلاث ملفات التقارنة المبينة شكل 14-40 معاملات تقارن 0.50 . أوجد الحث المكافئ بين

الطرفين AB . الجواب: 2.39 mH

14.30 أوجد شكلين للدائرة المكافئة المنقوطة للملفات التقارنة المبينة شكل 14-40 . الجواب: انظر

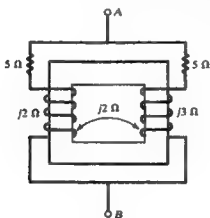
شكل 14-41 .



شكل 14-41

14.31 (أ) أوجد المعاوقة المكافئة عند الطرفين AB للدائرة المتقارنة المبينة شكل 14-42 ، (ب) اعكس اتجاه اللف لأحد الملفين وكرر المطلوب في (أ) .

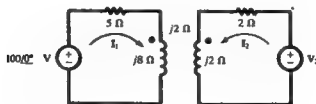
الجواب: (أ) $3.40 \angle 4.166^\circ \Omega$ ، (ب) $2.45 \angle 5.37^\circ \Omega$



شكل 14-42

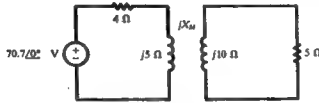
14.32 للدائرة المتقارنة شكل 14-43 . أوجد V_2 حيث $I_1 = 0$. ما هو الجهد على طرفي المعاوقة الحثية 8Ω لهذه الحالة .

الجواب: (عند النقطة) $100 \angle 0^\circ V$ ، $141.4 \angle 45^\circ V$.



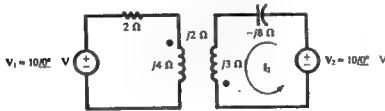
شكل 14-43

14.33 أوجد الممانعة المتبادلة X_M للدائرة المتقارنة شكل 14-44 إذا كانت القدرة المتوسطة في المقاومة 5Ω هي 45.24 W . الجواب: 4Ω .



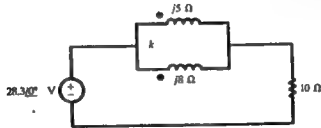
شكل 14-44

14.34 للدائرة المتقارنة شكل 14-45. أوجد مركبتى التيار الناشئ من كل منبع V_1 ، V_2 . الجواب: $0.77 \angle 112.6^\circ \text{ A}$ ، $1.72 \angle 86.05^\circ \text{ A}$.



شكل 14-45

14.35 أوجد معامل التقارن k في الدائرة المبينة شكل 14-46 إذا كانت القدرة في المقاومة 10Ω هي 32 W . الجواب: 0.791 .

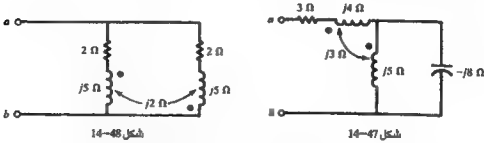


شكل 14-46

14.36 في (14a) استبدل a ، X_{11} ، X_{22} ، X_M بالعلاقات بدلالة X_1 ، X_2 ، k وبالتالي راجع مع (14b).

14.37 للدائرة المتقارنة المبينة شكل 14-47 أوجد معاوقة الدخل عند الطرفين ab.

الجواب : $3 + j36.3 \Omega$

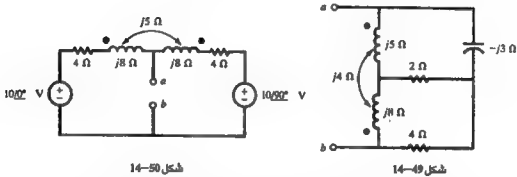


14.38 أوجد معاوقة الدخل عند الطرفين ab للدائرة المتقارنة المبينة شكل 14-48.

الجواب : $1 + 1.5 \Omega$

14.39 أوجد معاوقة الدخل عند الطرفين ab للدائرة المتقارنة المبينة شكل 14-49.

الجواب : $6.22 + j4.65 \Omega$



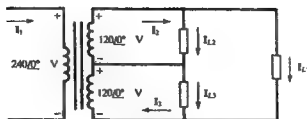
14.40 أوجد الدائرة المكافئة لثنتين ونورتون عند الطرفين ab للدائرة المتقارنة المبينة شكل 14-50.

الجواب : $V' = 7.07 \angle 4^\circ \text{ V}$, $I'' = 1.04 \angle 27.9^\circ \text{ A}$, $Z = 6.8 \angle 72.9^\circ \Omega$

14.41 للمحول المثالي المبين شكل 14-51. أوجد I_1 إذا كان

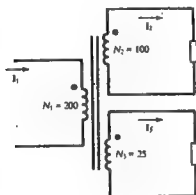
$$I_{L1} = 10.0 \angle 0^\circ \text{ A} \quad I_{L2} = 10.0 \angle -36.87^\circ \text{ A} \quad I_{L3} = 4.47 \angle -26.57^\circ \text{ A}$$

الجواب : $16.5 \angle -14.04^\circ \text{ A}$

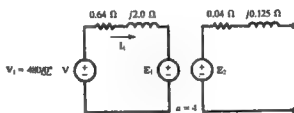


شكل 14-51

14.42 إذا كان الثانوى للمحول الخطى المبين شكل 14-52 مفتوحاً فإن تيار الابتدائى $I_1 =$ $4.0 \angle -89.69^\circ$ A أوجد معامل المقارن k . الجواب: 0.983



شكل 14-53

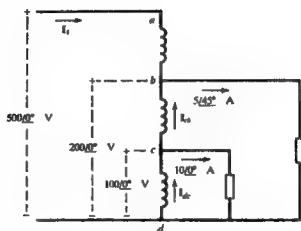


شكل 14-52

14.43 للمحول المثالى المبين شكل 14-53 أوجد I_1 إذا كان $I_2 = 50 \angle -36.87^\circ$ A ، $I_3 = 16 \angle 0^\circ$ A . الجواب: $26.6 \angle -34.29^\circ$ A

14.44 باعتبار المحول النفسى المبين شكل 14-45 مثالياً . أوجد التيارات I_{dc} ، I_{cb} ، I_a . الجواب: $3.70 \angle 22.5^\circ$ A , $2.12 \angle 68.71^\circ$ A , $10.34 \angle 11.83^\circ$ A .

رسم ۵ در ۷ سم



شکل ۵۴-۱۴

الفصل الخامس عشر

تحليل الدائرة باستعمال برنامج محاكاة ذو الدائرة المتكاملة "Pspice, Spice"

Pspice, Spice 15.1

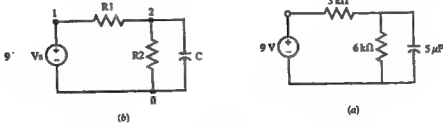
برنامج SPICE (برنامج للمحاكاة والدائرة المتكاملة) هو برنامج حاسب أنتج من السبعينيات بجامعة كاليفورنيا بباركلي وذلك لمحاكاة الدوائر الإلكترونية. وقد استخدم كوسيلة لتحليل وتعميم واختيار الدوائر المتكاملة وكذا بالنسبة لعدد كبير من الدوائر الإلكترونية والكهربية. وبرنامج Spice هو برنامج واسع الانتشار والنسخة التجارية له مثل Pspice لشركة ميكروسيم تستخدم نفس الخوارزم والأنظمة مثل Spice ولكنها توفر الدعم التكنيكي والإضافات التي تحتاجها المتطلبات في مجال الصناعة.

ويقدم هذا الفصل العناصر الأساسية لكل من Spice ، PSpice وتطبيقاتها في بعض الدوائر البسيطة وقدمت بعض الأمثلة المحولة بواسطة النسخة المجانية للبرنامج.

15.2 وصف الدائرة

شرح الدائرة موجود بالكامل على شكل مجموعة من الخطوات في ملف مجهز بالناشر ASCIL ويسمى ملف إدخال البيانات. ويمكن أيضاً إدخال البيانات بالرسم بتجهيز الدائرة على شاشة الحاسب بالبرنامج الخاص بذلك من شركة ميكروسيم. ونستعمل في هذا الفصل ملف الإدخال بالاسم المقترح SOURCE.CIR. ولحل الدائرة يشغل البرنامج على ملف الإدخال. ويقوم الحاسب بإخراج الحل على ملف يسمى ملف الخرج SOURCE.OUT.

مفـال 15.1 : استخدم PSpice لإيجاد الجهد المستقر للتيار المستمر على طرفي المكثف $5\mu F$ في شكل 15-1(a) .



شكل 15-1

أولاً نقوم بتسمية العقد بالأرقام 0 ، 1 ، 2 والعناصر بالرموز R_1 ، R_2 ، r بالنسبة V_s [شكل 15-1(b)] ، ثم بعد ذلك تنشأ ملف إدخال بيانات الدائرة (Source File) والذي له اسم EXMPL1.CIR .

```
DC analysis, Fig. 15-1
Vb      1  0  DC      9 V
R1       1  2  3 k
R2       0  2  6 k
C        0  2  5 uF
.END
```

ويتم تنفيذ الأمر PSPICE EXMPL1 فإن الحاسب يحل الدائرة ويكتب النتائج التالية في الملف

EXMPL1.OUT

```
NODE      VOLTAGE      NODE      VOLTAGE
(1)       9.0000      (2)       6.0000

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
Vb        -1.000E-03

TOTAL POWER DISSIPATION      9.00E-03 WATTS
```

وبين الخرج المطبوع أن الجهد عند العقدة 2 بالنسبة للعقدة 1 هو 6V والتيار الداخل لمنبع الجهد V_s هو $10^{-3} A$ والقدرة الكلية المستهلكة في الدائرة هي $9 \times 10^{-3} W$.

15.3 تحليل ملف إدخال البيانات

ملف الإدخال مثال 15-1 بسيط جداً ويحتوى على البيانات الضرورية لحل الدائرة لشكل 16-1 بواسطة Spice. وكل سطر فى ملف الإدخال يعتبر بياناً. وعموماً إذا كان السطر طويل جداً (أكثر من 80 خانة) فيمكن استكمالها فى الأسطر التالية ويجب أن تحتوى أسطر التكملة على الإشارة (+) فى أول عمود.

ولا يفرق PSpice بين الحروف الكبيرة والصغيرة وتستخدم الوحدات القياسية إذا لم يحدد غير ذلك.

العنوان

السطر الأول فى ملف المتبع لمثال 15-1 يسمى بيان العنوان. ويستخدم هذا السطر فى برنامج Spice كعنوان للملف الخارج وليس له تأثير فى التحليل. وبالتالي فإنه من الضروري تحديد هذا السطر للعنوان حتى لو ترك خالياً.

النهاية

ويطلب بيان END. عند نهاية ملف الإدخال وأى بيان يتبع كلمة END سيعتبر للملف إدخال منفصل.

البيانات

وتبين بصفة كاملة الأربع أسطر الباقية فى ملف الإدخال بيانات لدائرة مثال 15-1. حيث يوضح السطر الثانى جهد المتبع المسمى V المتصل بين العقدة 1 (الطرف الموجب للمنبع) وعقدة المقارنة O. والمتبع هو منبع تيار مستمر بالقيمة 9 V . ويبين السطر الثالث أن المقاومة المسماة R_1 ذات القيمة $3\text{ k}\Omega$ متصلة بين العقدتين 1، 2 وبالمثل فإن السطرين الرابع والخامس يوضحان توصيلة R_2 ($6\text{ k}\Omega$)، C ($5\text{ }\mu\text{F}$) على الترتيب بين العقدتين O، 2 وفى أى دائرة يجب أن تسمى إحدى العقد O لتكون هى عقدة المقارنة وتسمى مجموعة المعلومات والبيانات التى تشرح الشكل العام للدائرة وقيم عناصرها بقائمة (netlist) ومشرح بيان المعلومة Syntax فى بند 15-4.

التحكم والخرج

إذا لم توجد أوامر إضافية أخرى وإذا كان البرنامج قائم على بيانات الشبكة فإن برنامج Spice سيقوم بالحساب أتماتيكيا لحالة التيار المستمر المستقر للمتغيرات التالية :

(i) تقاس جهود العقد بالنسبة للعقدة O .

(ii) التيارات الداخلة لكل منبع جهد .

(iii) القدرة المستهلكة في الدائرة .

ومع هذا فإنه يمكن أن يحتوى البرنامج على بيانات إضافية للتحكم والخرج في ملف الإدخال لتعريف متغيرات أخرى (انظر بند 6-15) .

15.4 بيانات الدائرة وتحليل التيار المستمر

العناصر الفعالة

بيانات العناصر R ، L ، C ، تحتوي على الأقل على ثلاث أجزاء . الجزء الأول يعطى اسم عنصر لمجموعة من الأحرف متبداً بالمقاومة R ثم L أو C على الترتيب . والجزء الثانى يعطى رقم العقد مع فاصل بينها وبين العنصر المتصل بها . والجزء الثالث يعطى قيمة العنصر بالأوم أو الهنرى أو الفاراد مع استخدام مقاييس ونسب المعاملات المعطاه في جدول 1-15 حسب الحاجة .

جدول 15-1

مقاييس المعاملات والرموز

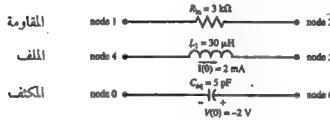
Name	Symbol	Value
femto	f	$10^{-15} = 1\text{E}-15$
pico	p	$10^{-12} = 1\text{E}-12$
nano	n	$10^{-9} = 1\text{E}-9$
micro	u	$10^{-6} = 1\text{E}-6$
milli	m	$10^{-3} = 1\text{E}-3$
kilo	k	$10^3 = 1\text{E}3$
mega	meg	$10^6 = 1\text{E}6$
giga	g	$10^9 = 1\text{E}9$
tera	t	$10^{12} = 1\text{E}12$

ويمكن بالنسبة للجزء الرابع إعطاء الحالات الابتدائية الخاصة باستخدام الصورة $IC = xx$.
والاصطلاح المتبع لبيان المعلومات هو كالتالي:

[الحالات الابتدائية] «القيمة» «العقد» «الاسم»

ويعني الأقواس المستطيلة أن هذا الجزء ذو بيان اختياري:

مثال 15.2 : أكتب بيانات المعلومات لكل من R ، L ، C المعطاه شكل 15-2.



شكل 15-2

العنصر	«الاسم»	«العقد»	«القيمة»	[الحالة الابتدائية]
المقاومة	Rin	1 2	3 k	
الملف	L1	5 4	30 μH	IC = -2 mA
المكثف	Ceq	6	5 pF	IC = -2 V

السطر الثالث لتوصيلة المكثف يحدد عقدة واحدة فقط والعقدة الناقصة تؤخذ دائماً كعقدة مقاومة.

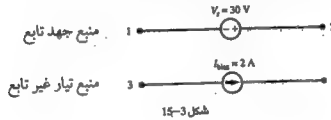
المنايع الغير تابعة

تحدد المنايع الغير تابعة بالتالي :

«القيمة» «النوع» «العقدة» «الاسم» .

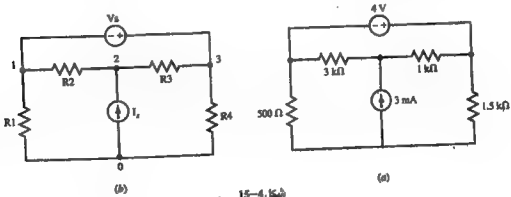
و«النوع» لمنايع التيار المستمر والمتردد هي DC ، AC على الترتيب والمنايع الأخرى المرتبطة بالزمن سيتم شرح في بند 15-12 وأسماء الجهود والتيارات تبدأ بالحرف V ، I على الترتيب وبالنسبة لمنايع الجهد فإن العقدة الأولى تبين الطرف الموجب ويمر التيار في منبع التيار من العقدة الأولى للثانية .

مخطط 15.3 : اكتب بيانات المعلومات للمعينين المبينين في شكل 15-3 .



«الاسم»	«العقدة»	«النوع»	«القيمة»	
Vs	2 1	DC	30 V	منبع جهد تابع
Ibias	3 4	DC	2 A	منبع تيار غير تابع

مطلب 15.4 : اكتب قائمة الشبكة للدائرة المبينة شكل 15-4(a) ونفذ عليه برنامج PSpice لتحليل التيار المستمر .



نكتب أولاً أرقام العقد وأسماء العناصر كما في شكل (b) 15-4 فتكون قائمة الشبكة هي :

```
DC Analysis, Fig. 15-4
R1      0  1  500
R2      1  2  3 k
R3      2  3  1 k
R4      0  3  1.5 k
V6      3  1  DC    4 V
Is      0  2  DC    3 mA
.END
```

وتكتب النتائج في ملف الخرج كما هو مبين فيما يلي :

```
NODE  VOLTAGE  NODE  VOLTAGE  NODE  VOLTAGE
(1)    .1250  (2)    5.3750  (3)    4.1250

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
V6        -1.500E-03
```

المنابع التابعة

توصف المصادر التابعة الخطية بالتالي :

«الكسب» «التحكم» «العقدة» «الاسم»

يجب أن يبدأ اسم كل منبع بحرف معين طبقاً للقاعدة التالية :

جهد المنبع ذو تحكم في الجهد Exx .

منبع تيار ذو تحكم في التيار Fxx .

منبع تيار ذو تحكم في الجهد Gxx .

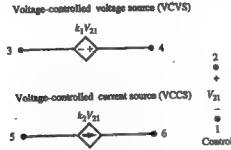
منبع جهد ذو تحكم في التيار Hxx .

ويكون ترتيب العقد مشابهاً للمنابع الغير تابعة وبالنسبة للمنابع ذات التحكم في الجهود فإن

«التحكم» هو زوج من العقد حيث يكون فرق الجهد متحكماً في المنبع باعتبار العقدة الأولى تمثل

الطرف الموجب (+) و«الكسب» هو معامل التناصب .

مثال 15.5 : أكتب بيانات المعلومات للمنايع ذات التحكم في الجهد لشكل 15-5 :

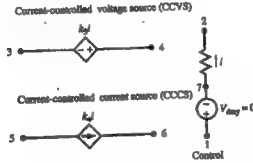


شكل 15-5

الكسب	التحكم	العقد	الاسم	المنايع
k1	2 1	4 3	E1	VCVS
k2	2 1	5 6	G1	VCCS

وفي حالة المنايع ذات التحكم في التيار نكتب أولاً القيمة عند الجهد صفر للمنايع (الجهد الكلى V_{dmy}) في مسار تيار التحكم ونستخدم اسمه كمتغير تحكم.

مثال 15.6 : أكتب بيانات المعلومات للمنايع ذات تحكم التيار لشكل 15-6 :



شكل 15-6

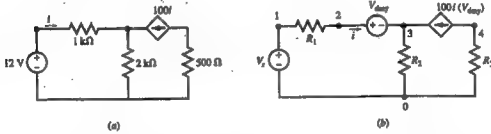
ادخل V_{dmy} مع التيار الداخل للمنايع عند العقدة 1 .

Vdmy 1 7 DC 0

بيانات المعلومات لمنايع ذات التحكم هي :

«الكسب»	«التحكم»	«العقد»	«الاسم»	«المنبع»
k3	Vdmy	4 3	H1	CCVS
k4	Vdmy	5 6	F1	CCCS

مفـال 15.7 : أكتب بيانات الشبكة للدائرة المبينة شكل (a) 15-7 ونفذ برنامج PSpice عليه في تحليل التيار المستمر.



شكل 15-7

أكتب أرقام العقد وأسماء العناصر كما في شكل (b) 15-7 وبالتالي فإن قائمة الشبكة تكون :

```

DC analysis with dependent source, Fig. 15-7
Vt      1  0      DC      12
R1       1  2      1k
R2       0  3      2k
R3       0  4      500
Vdmy     2  3      0
F1       4  3      Vdmy   100
.END

```

وبذلك تكون النتائج في ملف الخرج هي :

```

NODE VOLTAGE      NODE VOLTAGE      NODE VOLTAGE      NODE VOLTAGE
(1)   12.0000     (2)   11.9410     (3)   11.9410     (4)   -2.9557

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
Vt        -5.911E-05
Vdmy      5.911E-05

TOTAL POWER DISSIPATION  7.09E-04 WATTS

```

15.5 بيانات التحكم والخروج فى تحليل التيار المستمر

بعض البيانات الخاصة لعمليات التحكم وأشكال الخروج . والأمثلة منها :

OP . تطيع نقطة تشغيل التيار المستمر لجميع المتابع الغير تابعة .

DC . اجتاز قيمة منبع التيار المستمر الغير تابع (أى تأخذ القراءة التالية) والاصطلاح هو :

«حجم الخطوة» «القيمة النهائية» «القيمة الابتدائية» «الاسم» DC

PRINT . وهى تطيع قيم المتغيرات والاصطلاح هو :

«الخروج المتغير» «النوع» PRINT

«النوع» وهو DC ، AC أو TRAN (عابر) .

PLOT . وهى لطباعة المتغيرات والاصطلاح هو :

«الخروج المتغير» «النوع» PRINT

PROBE وهى لإنشاء ملف بيانات DAT* . والذى يمكن رسمها فى التحليل المتقدم باستشارة

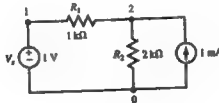
البرنامج PROBE والمصطلح هو :

«الخروج المتغير» [PROBE

مفصال 15.8 : أوجد قيم V_s فى الدائرة لشكل 8-15 بحيث أن القدرة المستهلكة فى المقاومة $1\text{ k}\Omega$

تكون صفراً استخدم الأمر DC . كالمدى V_s من 1 إلى 6 V بخطوات كل منها 1 V

واستخدم PRINT لتبين $I(V_R)$ ، $V(1,2)$ ، $V(2)$.



شكل 8-15

ملف الإدخال هو

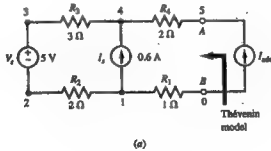
```
DC sweep, Fig. 15-8
Vs 1 0 DC 1 V
Is 0 2 DC 1 mA
R1 1 2 1k
R2 0 2 2k
.DC Vs 1 6 1
.PRINT DC I(Vs) V(1,2) V(2)
.END
```

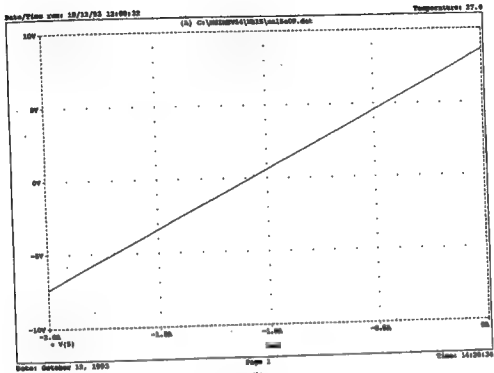
النتائج في ملف الخرج هي :

Vs	I(Vs)	V(1,2)	V(2)
1.000E+00	3.333E-04	-3.333E-01	1.333E+00
2.000E+00	-1.333E-12	1.333E-09	2.000E+00
3.000E+00	-3.333E-04	3.333E-01	2.667E+00
4.000E+00	-6.667E-04	6.667E-01	3.333E+00
5.000E+00	-1.000E-03	1.000E+00	4.000E+00
6.000E+00	-1.333E-03	1.333E+00	4.667E+00

الجواب: $V_s = 2 \text{ V}$.

مثال 15.9 : أكتب ملف الإدخال للدائرة المبينة شل (a) باستخدام الأوامر DC ، PLOT ، PROBE. ولإيجاد معادلة الخواص I-V لتغير قيم I من 0 إلى 2A عند الطرفين AB.





شكل 15-9

نوصل أولاً منبع تيار مستمر I_{add} عند الطرفين AB وندخل التيار I قيمة (أى تأخذ قراءات متتالية) من 0 إلى 2A - باستخدام الأمر DC. ونرسم قيم V مع I. وحيث أن الدائرة خطية فإنه يكفي الحصول على نقطتين للرسم. ومع هذا فإنه لتوضيح الرسم فإننا نستخدم عشر نقط من ملف الإدخال كالتالى:

Terminal Characteristic, Fig. 15-9

Iadd	0 5	DC	0
Is	0 4	DC	0.6 A
Vb	3 2	DC	5 V
R1	0 1	1	
R2	1 2	2	
R3	3 4	3	
R4	4 5	2	
DC	Iadd	0	-2 0.2
PLOT	DC	V(5)	
PROBE			
END			

والخرج مبين فى شكل 15-9(b). ومعادلة I-V هى $V = 8I + 8.6$.

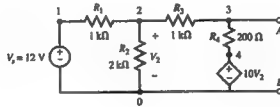
15.6 مكافئ ثنائي

الأمر TF.

يعطى الأمر TF. دالة التحويل من متغير الدخل إلى متغير المخرج وينتج عن ذلك المقاومات من ناحية المتبوعين وبالتالي يمكن إيجاد مكافئ ثنائي للدائرة ذات المقاومة. والاصطلاح هو:

«الدخل المتغير» «المخرج المتغير» TF.

مثال 15.10 : استخدم الأمر TF. لإيجاد مكافئ ثنائي للدائرة من ناحية الطرفين AB لشكل 15-10.



شكل 15-10

أرقام العقد وأسماء العناصر مبيّنة على شكل 15-10. ملف الإدخال هو :

```
Transfer Function in Fig. 15-10
V2      1  0      DC      12
E1      4  0      2  0     10
R1      1  2      1 k
R2      2  0      2 k
R3      2  3      1 k
R4      3  4      200
        V(3)  V2
.TF
.END
```

ويحتوي ملف المخرج على النتائج التالية :

```

NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE
(1) 12.0000 (2) -2.0000 (3) -17.0000 (4) -20.000

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME CURRENT
V2 -1.400E-02

TOTAL POWER DISSIPATION 1.68E-01 WATTS

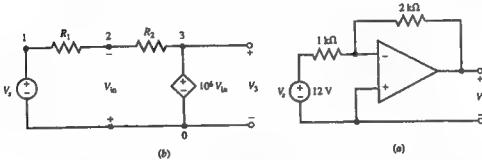
SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS
V(3)/V2 = -1.417E+00
INPUT RESISTANCE AT V2 = 8.571E+02
OUTPUT RESISTANCE AT V(3) = -6.944E+01
```

وبالتالي فإن $V_{Th} = -1.417 (12) = -17 \text{ V}$ ، $R_{Th} = -69.44 \Omega$

15.7 دوائر مكبر التشغيل OP AMP

يمكن تمثيل مكبر التشغيل بمنابع الجهد ذات معاوقة دخل كبيرة وكسب جهد متحكم كبير ويمكن تكرار التمثيل عند استخدامه أكثر من مرة.

مثال 15.11 : أوجد دالة التحويل V_3/V_8 في دائرة مكبر التشغيل المثالي شكل (a) 15-11.



شكل 15-11

يمكن استبدال مكبر التشغيل بجهد منبع جهد مطلق ذو الكسب 10^6 [انظر شكل (b) 15-11].

```
Inverting op amp circuit, Fig. 15-11
V8      1  0      DC      12
E1       3  0      0  2     1E6
R1       1  2      1 k
R2       2  3      2 k
.TF      V(3)  V8
.END
```

نكتب دالة التحويل في ملف الخرج .

```
NODE      VOLTAGE      NODE      VOLTAGE      NODE      VOLTAGE
(1)      12.0000      (2)      24.00E-06      (3)      -24.0000

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
V8        -1.200E-02

TOTAL POWER DISSIPATION  1.44E-01  WATTS

SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS
V(3)/V8 = -2.000E+00
INPUT RESISTANCE AT V8 = 1.000E+03
OUTPUT RESISTANCE AT V(3) = 0.000E+00
```

الأمـر SUBCKT.

تعرف الدائرة الفرعية بمجموعة البيانات تبدأ بما يلي :

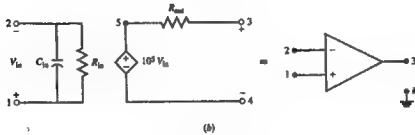
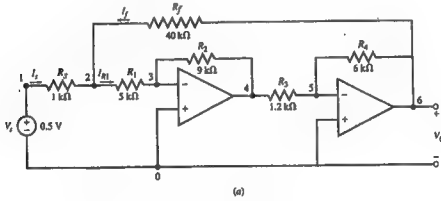
«الأطراف الخارجية» «الاسم» SUBCKT.

وتنتهى بالأمـر ENDS. ومن خلال قائمة الشبكة نرسم للدائرة الفرعية كالتالى :

«العقد» «الاسم» X_{nn}

وبالتالى فإن الأمر SUBCKT. ويمكن أن يحدد اسماً فى تمثيل مكبر العمليات لتكراره أكثر من مرة.

مثال 15.12 إذا أعطيت الدائرة المبينة شكل 15-12(a) أوجد I_2 ، I_R ، I_3 ، V_2 ، لقيم V_s من 0.5 إلى 2 V بخطرة قيمتها 0.5 V مستخدماً مكبر عملى [شكل 15-12(b)] مع $R_{in} = 100 \text{ k}\Omega$ ، $R_{out} = 10 \text{ k}\Omega$ ، $C_{in} = 10 \text{ pf}$ ، وكسب الدائرة المفتوحة 10^5 .



شكل 15-12

يستخدم ملف الإدخال للدائرة الفرعية المسماة OPAMP لشكل 15.12(b) الذي يبدأ توصيفه بالأمر SUBCKT. وينتهي بالأمر ENDS. والبيانات X1 ، X2 يصفان مكبرا العمليات بالرجوع للدائرة الفرعية للمكبر OPAMP. لاحظ الترابط بين توصيلات العقد في X1 ، X2 مع تلك الخاصة بالأطراف الخارجية المبينة في بيان SUBCKT. ويكون ملف الإدخال هو :

دائرة مكبر عمليات في شكل 15-12 باستخدام SUBCKT.

```
.SUBCKT      OPAMP      1 2 3 4
Rin      1 2      10 E5
Cin      1 2      10 pF
Rout      3 5      10 k
Eout      5 4      1 2      10 E5
.ENDS

Vb      1 0      DC
Rs      1 2      1 k
R1      2 3      5 k
R2      3 4      9 k
R3      4 5      1.2 k
R4      5 6      6 k
Rf      6 2      40 k
X1      0 3      4 0      OPAMP
X2      0 5      6 0      OPAMP
.DC      Vb      0.5      2      0.5
.PRINT   DC      V(2)      V(6)      I(Vb)      I(R1)      I(Rf)
.TF      V(6)      Vb
.END
```

ويكون ملف المخرج هو :

منحنيات التحويل للتيار المستمر

Vb	V(2)	V(6)	I(Vb)	I(R1)	I(Rf)
5.000E-01	5.000E-01	4.500E+00	-3.372E-09	1.000E-04	9.999E-0
1.000E+00	1.000E+00	9.000E+00	-6.745E-09	2.000E-04	2.000E-0
1.500E+00	1.500E+00	1.350E+01	-1.012E-08	3.000E-04	3.000E-0
2.000E+00	2.000E+00	1.800E+01	-1.349E-08	4.000E-04	4.000E-0
NODE	-00.00E-00	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	.5000	(2)	.5000	(3)	9.400E-06
(5)	-13.00E-06	(6)	4.4998	(X1.5)	-9.3996
				(4)	-9000
				(X2.5)	12.9990

تيارات منابع الجهد .

الاسم

التيار

Vb

-3.372E-09

القدرة الكلية المستهلكة 1.69E - 09 WATS

خواص الإشارة الصغيرة

مقاومة الدخل عند $V_g = 1.483E + 08$

مقاومة الخرج عند $V(6) = 7.357E - 02$

لا يوجد فقد في الجهد على طرفي R_g . وبالتالي فإن $V_g = V(2)$ ويكون الكسب الكلي $V(6)/V_g = V(2)/V_g = g$ ويوجه التيار المسحوب بالمقاومة R إلى مقاومة التغذية الخلفية R_P .

15.8 الحالة المستقرة للتيار المتردد وتجاوب التردد

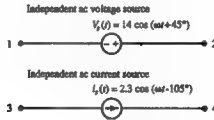
مصادر التيار المتردد الغير تابعة

توصف مصادر التيار المتردد الغير تابعة ببيان له الاصطلاح التالي :

«زاوية الوجه بالدرجات» «القيمة» AC «العقد» «الاسم»

تبدأ مصادر الجهد بالحرف V ومصادر التيار بالحرف I ويكون الإتجاه مثل المتعارف عليه في مصادر التيار المستمر .

مسألة 15.13 : أكتب بيانات المصادر المبينة شكل 15-13 .



شكل 15-13

الوجه	القيمة	النوع	العقد	الاسم	مصدر AC
45	14	AC	2 1	V_g	Voltage
-105	2.3	AC	3 4	I_g	Current

الأمر AC.

الأمر AC. يقوم بتغيير (أخذ قراءات) التردد لجميع منابع التيار المتردد في الدائرة في المدى المطلوب أو أن يجعلها عند القيمة المطلوبة والاصطلاح هو :

«النهاية f» «البداية f» «عدد النقاط» «نوع التغير» AC.

والحالة المستقرة للتيار المتردد «نوع التغير» هو خطى (LIN). وللحصول على تردد وحيد للإشارة فإن ترددات البداية والنهاية تضبط بالقيمة المطلوبة ويتخذ عدد النقاط مساوياً للواحد .

الامر PRINT AC. والامر PLOT AC.

الامر PRINT AC. يطبع القيمة وزاوية الوجه للخروج في الحالة المستقرة . والاصطلاح هو :

«الوجه» «القيمة» PRINT AC.

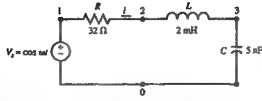
القيمة وزوايا الوجه للجهود هي V_p ، V_m المتغيران على الترتيب والقيم والأوجه بالنسبة للتيارات هما I_p ، I_m المتغيران على الترتيب والاصطلاح PLOT AC. مشابه لذلك بالنسبة للأمر PRINT AC.

مثال 15.14 : في دائرة التوالي RLC لشكل (a) 15-14 غير تردد المنبع من 40 إلى 60 kHz في 200 خطوة . أوجد القيمة وزاوية الوجه للتيار I باستخدام PLOT . PROBE.

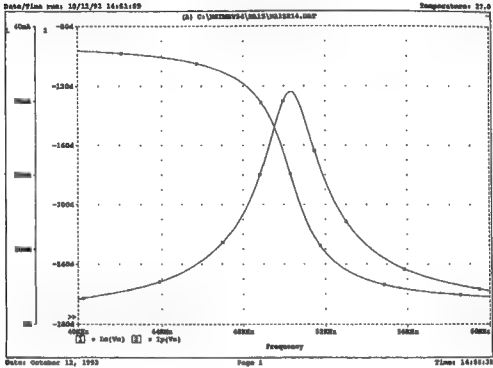
ملف الإدخال هو :

```
AC analysis of series RLC, Fig. 15-14
Vs      1  0      AC      1  0
R       1  2      32
L       2  3      2m
C       3  0      5n
.AC     LIN      200      40k  60k
.PLOT   AC      Im(Vs) Ip(Vs)
.PROBE  Vm(1,2) Vm(2,3) Vm(3) Im(Vs) Ip(Vs)
.END
```

شكل تجاوب التردد مرسوم في شكل (b) 15-14 . بالامر Prob.



(a)



(b)

شكل 15-14

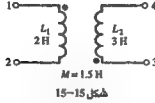
15.9 الحث المتبادل والمحولات

يمثل الحث المتبادل بين الملفات بنقطة يسبق اسمها بحرف k ومصطلح بيان المعلومة هو :

(معامل المتقارن) ملف 2 ملف 1 «الاسم»

ولا بد من ملاحظة قاعدة النقطة والتي تحدد إشارة حد الحث المتبادل وذلك بوضع الأطراف للنقطة على كل ملف هو أول عقدة لدخول بيان المعلومات.

مثال 15-5 أكتب البيانات الثلاثة التي تشرح الملفات المتقارنة لشكل 15-5 .



معامل التقارن هو $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{1.5}{\sqrt{2 \cdot 3}} = 0.61$ وقائمة الشبكة تحتوي على التالي :

L1	1	2	2
L2	3	4	3
K12	L1	L2	0.61

مثال 15.16 : ارسم معاوقة الدخل $Z_{in} = V_1/I_1$ في الدائرة المبينة شكل (a) 15.16 لقيم المتغيرة من 0.01 إلى 1 Hz .

لإيجاد Z_{in} نصل منبع تيار متردد 1-A من العقدة O إلى العقدة 1 ثم ارسم القيمة وزاوية الوجه للجهد $V(1)$ بينهما . ملف الإدخال هو :

AC analysis of coupled coils, Fig. 15-16

```

IADD 0 1 AC 1 0
C 0 1 1000000 uF
R 0 2 3
L1 1 2 2H
L2 3 2 5H
K12 L1 L2 0.6325 H
L3 0 3 1H
.AC LIN 20 .01 1
.PRINT AC Vm(1) Vp(1)
.PROBE
.END

```

$Vp(1)$ ، $Vm(1)$ وهما القيمة وزاوية الوجه للمعاوقة Z_{in} وقد رسمت باستخدام Prob الرسم مبين في شكل 15-16(b) . لاحظ أن القيمة العظمى تحدث عند 100 mHz تقريباً .

15.10 تمثيل النبائط ذات القيم المتغيرة

الأمر .MODEL

عوامل العنصر الغير فعال يمكن تغييرها باستخدام الأمر .MODEL. والاصطلاح هو :

[«القيمة» = «المعامل»] «النوع» «الاسم» .MODEL

حيث «الاسم» هو الاسم الموضوع للعنصر بالنسبة للعناصر الغير فعالة الحفظية فلان «النوع» هو :

للمقاومة RES

للملف IND

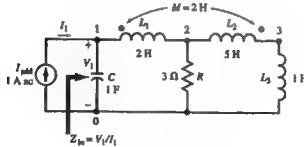
للمكثف CAP

ويمكن تغيير القيم الخاصة بالنموذج من خلال المدى المطلوب وعلى أساس خطوات معروفة باستخدام الأمر STEP.

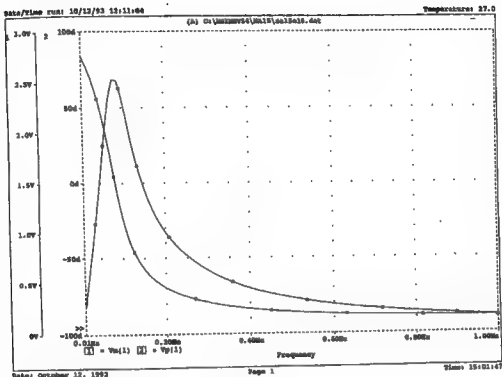
(حجم الخطوة) «القيمة النهائية» «القيمة الابتدائية» «الاسم» .STEP LIN

وفيما يلي مثال باستخدام الأمرين .MODEL ، .STEP. لتعريف مقاومة سخان ذات مقاومة تتغير من 20 إلى 40 Ω من خلال خمس خطوات ينتج عنها القيم 20 ، 25 ، 30 ، 35 ، 40 .

```
.MODEL heater RES(R=20)
.STEP RBS heater(R) 20 40 5
```



(a)



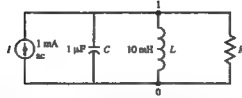
(b)

شكل 15-16

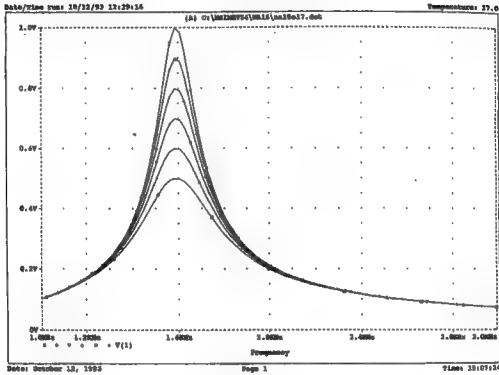
مثال 15.17 : استخدم الأمر Probe. لرسم V في الدائرة شكل (a) 15-17 لقيم f المتغيرة من 1 إلى 3 kHz في 100 خطوة وأيضاً R من 500 Ω إلى 1 k Ω بخطوات كل منها 100 Ω . باستخدام الأمر MODEL. نوجد المقاومة RLeak ونقوم بتغير قيمتها باستخدام STEP. وفي الإدخال التالي يرسم شكل تجاوب الجهد V مع f باستخدام Prob وهو مبين في شكل (b) 15-17.

Parallel resonance with variable R, Fig. 15-17

I	0 1	AC	1 m	0
R	1 0	RLeak	1	
L	1 0	10 m		
C	1 0	1 u		
.MODEL	RLeak	RES(R = 1)		
.STEP	LIN	RES	RLeak(R)	500 1 k 100
.AC	LIN	100 1 k	3 k	
.PROBE				
.END				



(a)



(b)

شكل 15-17

15.11 تجاوب الزمن والتحليل العابر

الأمر TRAN.

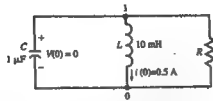
يمكن إيجاد تجاوبات الزمن مثل التجاوبات الطبيعية للحالات الابتدائية في الدوائر الخالية من المنبع والتجاوبات للدخول السليمة والدفعية والأسية أو أى أنواع أخرى تعتمد على الزمن وذلك بالأمر TRAN. ويبدأ عند $t = 0$ وتحدد قيمة الزيادة وكذا الزمن النهائى كما يلى :

TRAN (قيمة الزمن النهائي) (قيمة الزيادة)

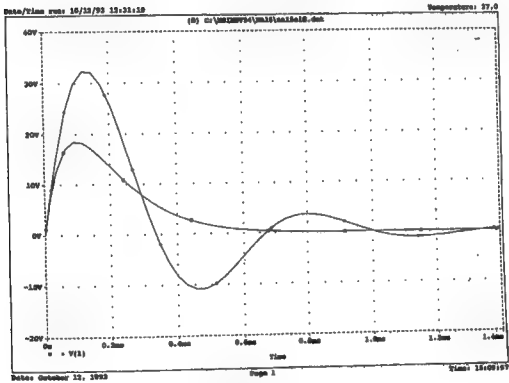
مثال 15.18 : استخدم TRAN ، PROBE. وذلك لرسم دائرة التوازي RLC المبينة شكل (a) 15-18 وذلك لقيم $R = 50 \Omega$ ، 150Ω لقيم $0 < t < 1.4 \text{ ms}$ والحالات الابتدائية

$$V(0) = 0, I(0) = 0.5 \text{ A}$$

ملف الإدخال



(d)



15-18 مکمل

دائرة توازي يلدون منبع بها R متغيرة .

```

R      1 0      LOSS      1
L      0 1      10m      IC=.5
C      1 0      1u      IC=0
.MODEL LOSS RES(R=6)
.STEP RES LOSS(R)      50 150 100
.TRAN 2.0E-6 1.4E-3      UTC
.PROBE
.END

```

يبين شكل 15-18(b) رسم الجهد مرسوماً بالراسم . لقيم $R = 500$ ولا توجد ثدبليات .

15.12 توصيف أنواع أخرى من المنابع

المنابع المرتبطة بالزمن والتي تحتوي على مركبات تيار مستمر وتيار متردد وكميات عابرة يعبر

عنها بالتالي :

«المركبة العابرة» «مركبة التيار المتردد» «مركبة التيار المستمر» «العقد» «الاسم»

وإذا لم تحدد قيم المركبة المستمرة أو المتغيرة فإن البرنامج يأخذ صفراً ، في حين أن المركبة العابرة تظهر عند $t > 0$ وفيما يلي وصف للعديد من المركبات العابرة .

المنبع الأسى

يبدأ المنبع عند قيمة ابتدائية ثابتة V_0 وعند t_0 يتغير أسياً من V_0 إلى V_1 بثابت زمني (τ_1) وعند $T = t$ يعود أسياً للقيمة V_0 ثابت زمني آخر تاو 2 (τ_2) والمصطلح هو :

$$\text{EXP}(V_0, V_1, t_0, \tau_1, T, \tau_2)$$

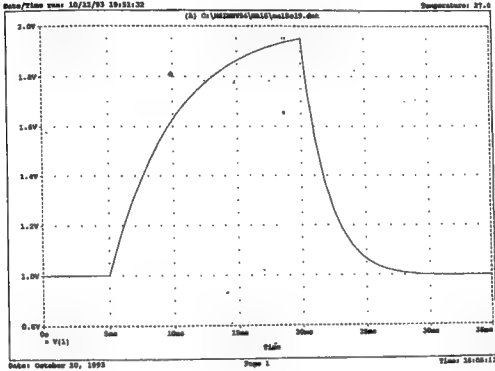
مثال 15.19 : يبدأ منبع جهد تيار مستمر 1 V في الزيادة أسياً عند $t = 5 \text{ ms}$ بثابت زمني 5 ms .

ويصل إلى 2 V وبعد 15 ms يبدأ التناقص للقيمة 1 V بثابت زمني 2 ms . أكتب بيان

للمنبع واستخدم الراسم لرسم شكل الموجه .

$$V_0 \quad 1 \quad 0 \quad \text{EXP}(1 \quad 2 \quad 5 \text{ m} \quad 5 \text{ m} \quad 20 \text{ m} \quad 2 \text{ m})$$

رسم شكل الموجة المبينة في شكل 15-19 .



شكل 15-19

منبع النبضة

يمكن تمثيل شكل الموجة للنبضة الدورية والذي يتغير من V_0 إلى V_1 ويعود مرة أخرى كالتالى :

(الدورة الفترة زمن الهبوط زمن الصعود التأخير V_0 V_p) النبضة

مثال 15.20 : (أ) أكتب بيانات لموجة نبضة التى تتغير عشرة مرات فى الثانية بين القيم 1 V ، 2 V ،

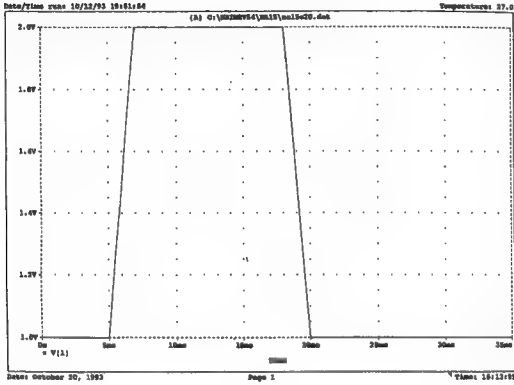
بزمن صعود وهبوط 2 ms وتستغرق الدفعة عند 2 V لمدة 11 ms وتبدأ النبضة الأولى

عند $t = 5$ ms . (ب) استخدم الرسم وارسم شكل الموجة التى فى (أ) .

(أ) بيان المعلومات هو :

V_h 1 0 PULSE(1 2 5m 2m 2m 11m 100m)

(ب) رسم شكل الموجه مبين فى شكل 15-20 .



شكل 15-20

المنبع الجيبى

يبدأ المنبع عند قيمة ابتدائية ثابتة V_0 وعند t_0 يضاف إليها المركبة الأسية المتناقصة الجيبية ذات التردد F وزاوية الوجة وقيمة البداية V_1 ومعامل التناقص الفا (α) واصطلاح شكل الموجه هو :

$$\text{SIN}(V_0, V_1, f, t_0, \alpha, \text{phase})$$

مثال 15.21 : أكتب التعبير الرياضى وبيان المعلومات لمنبع جهد تيار مستمر 1 V والمضاف إليه جهد جيبى بتردد 100 Hz بزاوية وجه صفر عند الزمن $t = 5 \text{ ms}$ ، القيمة العظمى للموجه الجيبية 2 V وتتناقص إلى الصفر بثابت زمنى 10 ms . (ب) باستخدام الراسم ارسم $V_s(t)$.

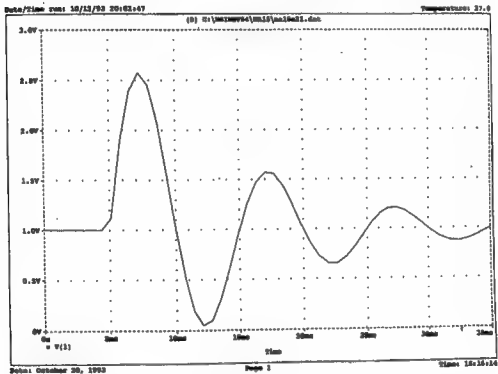
(أ) معامل التناقص هو مقلوب ثابت الزمن ويساوى ألفا $(\alpha) = 100 = 1/0.01$ لقيم $t > 0$ يكون الجهد رياضياً.

$$V_f(t) = 1 + 2e^{-1000(t-0.005)} \sin 628.32(t-0.005)u(t-0.005)$$

بيان المعلومات هو

$$V_s \quad 1 \quad 0 \quad \text{SIN}(1 \quad 2 \quad 100 \quad 5 \text{ m} \quad 100)$$

(ب) رسم شكل الموجه مبين في شكل 15-21 .



شكل 15-21

مسألة 15.22 : أوجد الجهد على طرفي مكثف $1 \mu\text{F}$ بشحنة ابتدائية صفر والمتصل بمنبع جهد من خلال مقاومة $1 \text{ k}\Omega$ كما هو مبين شكل 15-22(a) بيان منبع الجهد كالتالي :

$$V_s = \begin{cases} 15.819 \text{ V} & \text{for } 0 \leq t < 1 \text{ ms} \\ 10 \text{ V} & \text{for } t > 1 \text{ ms} \end{cases}$$

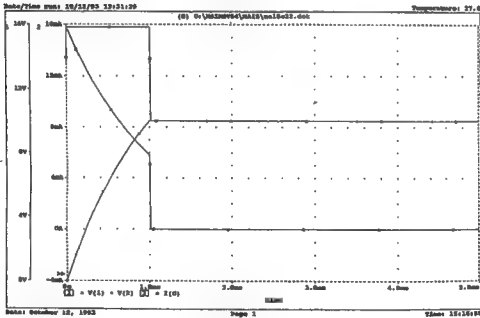
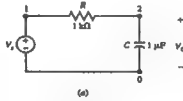
نستخدم الشكل الأسى للموجه لتمثيل V_s والملف هو .

```

Dead-beat Pulse-Step response of RC
Vs      1 0      EXP10 15.819 0 1.0E-6 1.0E-3 1.0E-6)
R       1 2      1k
C       2 0      1uF
.TRAN   1.0E-6 5.0E-3 UIC
.PROBE
.END

```

شكل 15-22(b) يبين رسم جهد المكثف وعند $0 < t < 1 \text{ ms}$ فإن التجاوب الدفعى يتزايد أسياً نحو قيمة التيار المستمر المستقر المستقرة 15.819 V . وعند $t = 1 \text{ ms}$ فإن التجاوب يصل إلى القيمة 10 V . وأيضاً عند $t = 1 \text{ ms}$ فإن جهد المنبع يتناقص إلى 10 V وحيث أن جهدى المنبع والمكثف متساويان فإن التيار فى المقاومة يصبح صفراً ونصل إلى الحالة المستقرة وبذلك يستمر التجاوب العابر لمدة 1 ms فقط .



شكل 15-22

15.13 ملخص

بالإضافة للعناصر الخطية والمتابع المستخدمة في البنود السابقة فإنه يمكن الإضافة إلى قائمة الشبكة البناط غير خطية مثل الموحدات (Dxx) والترتسرات ذات التأثير المجالي (Jxx) والموسفت (Mxx) (mosfat) وخطوط الإرسال (Txx) والمقاييس ذات التحكم في الجهد (Sxx) والمقاييس ذات التحكم في التيار (Wxx). ويمكن عمل تحليل الحساسية باستخدام البيان SENS. ويمكن عمل تحليل فورير باستخدام الأمر FOUR. ويمكن الحصول عليها من الكتب أو دليل البرامج Pspice ، Spice وفيما يلي ملخص للبيانات المستخدمة في هذا الفصل .

بيانات الأوامر

λ, L, C	(name)	(nodes)	(value)	[[initial conditions]]	
Mutual Inductance	Ixx	(ind.a)	(ind.b)	(coupling coefficient)	
Subcircuit Call	Xxx	(name)	(connection nodes)		
DC Voltage source	Vxx	(nodes)	DC	(value)	
DC Current Source	Ixx	(nodes)	DC	(value)	
AC Voltage source	Vxx	(nodes)	AC	(magnitude)	(phase)
AC Current source	Ixx	(nodes)	AC	(magnitude)	(phase)
VCVS	Exx	(nodes)	(control)	(gain)	
CCCS	Fxx	(nodes)	(control)	(gain)	
VCCS	Gxx	(nodes)	(control)	(gain)	
CCVS	Hxx	(nodes)	(control)	(gain)	

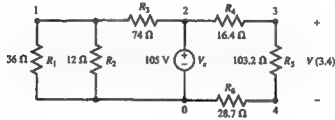
أوامر التحكم

```
.AC <sweep type> <number of points> <starting f> <ending f>
.DC <name> <initial value> <final value> <step size>
.END
.ENDS
.IC <V(node) = value>
.MODEL <name> <type> [[<(parameter) = (value)>]]
      <type> is RES for resistor
      <type> is IND for inductor
      <type> is CAP for capacitor
.LIB [[file name]]
.OP
.PRINT DC <output variables>
.PLOT DC <output variables>
.PRINT AC <magnitudes> <phases>
```

.PLOT AC (magnitudes) (phases)
.PRINT TRAN (output variables)
.PROBE [(output variables)]
.STEP LIN (type) (name(param.)) (initial value) (final value) (step size)
.SUBCKT (name) (external terminals)
.TF (output variable) (input source)
.TRAN (increment size) (final value)

مسائل محلولة

15.1 استخدم PSpice لإيجاد $V(3, 4)$ في الدائرة المبينة شكل 15-23.



شكل 15-23

ملف الإدخال هو :

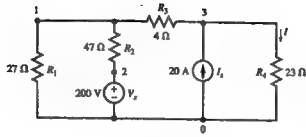
```
DC analysis, Fig. 15-23
Vt      2  0      DC      105 V
R1      0  1      36
R2      0  1      12
R3      1  2      74
R4      2  3      16.4
R5      3  4      103.2
R6      4  0      28.7
DC      Vt  105   105      1
.PRINT  DC  V(1)  V(3,4)
.END
```

يحتوى ملف المخرج على :

```
DC TRANSFER CURVES
Vt      V(1)      V(3,4)
1.050E+02  1.139E+01  7.307E+01
```

وبذلك فإن $V(3, 4) = 73.07 \text{ V}$

15.2 أكتب ملف الإدخال للدائرة شكل 15-24 وأوجد I في R_4 .



شكل 15-24

ملف الإدخال هو :

```

DC analysis, Fig. 15-24
Vb      2   0   DC      200 V
Is       0   3   DC      20 A
R1       0   1   27
R2       1   2   47
R3       1   3   4
R4       3   0   23
.DC      Vb  200  200  1
.PRINT   .DC  I(R4)
.END

```

يحتوى ملف الخرج على النتائج التالية :

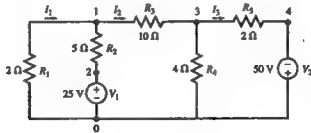
```

Vb      I(R4)
2.000E+02  1.123E+01

```

التيار $I(R_4) = 11.23 \text{ A}$ يمر من العقدة 3 إلى العقدة 0 طبقاً لترتيب العقد فى ملف الدخول للمقاومة R_4 .

15.3 : أوجد الثلاث تيارات الحلقية فى الدائرة لشكل 15-25 باستخدام Pspice وقارن الحل مع الحل الرياضى .



شكل 15-25

ملف الدخل هو :

```
DC analysis, Fig. 15-25
V1      2  0      DC      25
V2      0  4      DC      50
R1      0  1      2
R2      1  2      5
R3      1  3      10
R4      3  0      4
R5      3  4      2
.DC      V1 25      25      1
.PRINT   DC I(R1)  I(R3)  I(R5)
.END
```

يحتوى ملف الخرج على التالى :

```
DC TRANSFER CURVES
V1      I(R1)      I(R3)      I(R5)
2.500E+01  -1.306E+00  3.172E+00  1.045E+01
```

يحتاج الحل الرياضى لحل ثلاث معادلات آتية .

15.4 باستخدام PSpice أوجد قيمة V_s فى شكل 15-4 بحيث لا يفلذ منبع الجهد أى قدرة .

نقوم بتغيير V_s من 1 إلى 10 V وبذلك فإن ملفى الدخل والخرج يكونان :

```
DC sweep in the circuit of Fig. 15-4
R1      0  1      500
R2      1  2      3 k
R3      2  3      1 k
R4      0  3      1.5 k
Vs      3  1      DC      4 V
Is      0  2      DC      3 mA
.DC      Vs      1      10      1
.PRINT   DC I(Vs)
.PROBE
.PLOT    DC I(Vs)
.END
```

يحتوى ملف الخرج على النتائج التالية :

```
DC TRANSFER CURVES
Vs      I(Vs)
1.000E+00  7.500E-04
2.000E+00  -2.188E-12
3.000E+00  -7.500E-04
```

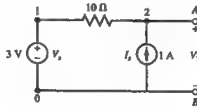
```

4.000E+00  -1.500E-03
5.000E+00  -2.250E-03
6.000E+00  -3.000E-03
7.000E+00  -3.750E-03
8.000E+00  -4.500E-03
9.000E+00  -5.250E-03
1.000E+01  -6.000E-03

```

التيار V_s يكون صفراً عند $V_s = 2$ V .

15.5 أجز تحليل التيار المستمر لدائرة شكل 15-26 وأوجد مكافئ ثنتين لها بالنسبة للطرفين AB .



شكل 15-26

نستخدم أمر TF. في قائمة الشبكة التالية :

```

Thévenin equivalent of Fig. 15-26
Vb      1  0  DC      3
R1      1  2  10
Is      0  2  DC      1
.TF     V(2)  Is
.END

```

يحتوى ملف الخرج على النتائج التالية :

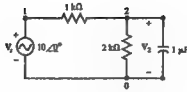
```

NODE      VOLTAGE      NODE      VOLTAGE
(1)      3.0000      (2)      13.000
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
Vb        1.000E+00
TOTAL POWER DISSIPATION  -3.00E+00  WATTS
SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS
V(2)/Is = 1.000E+01
INPUT RESISTANCE AT Is = 1.000E+01
OUTPUT RESISTANCE AT V(2) = 1.000E+01

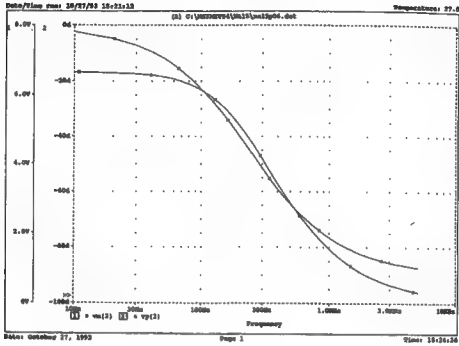
```

مكافئ ثنتين $V_{Th} = 13$ V ، $R_{Th} = 10 \Omega$.

15.6 أجز تحليل التيار المتردد في دائرة شكل 15-27(a) وأوجد القيمة المركبة للجهد V_2 لقيم f المتغيره من 100 Hz إلى 10 kHz في 10 خطوات .



(a)



(b)

شكل 15-27

نضيف إلى قائمة الشبكة أمر AC. لتغير التردد ونحصل على $V(2)$ بأى من الأوامر PRINT ، PLOT ، PROBE. وبذلك يكون ملف الدخل هو :

```

AC analysis of Fig. 15-27(a).
V1      1  0      AC      10      0
R1      1  2      1 k
R2      2  0      2 k
C       2  0      1 uF
.AC      LIN      10      100      10000
.PRINT  AC      Vm(2)      Vp(2)
.PLOT   AC      Vm(2)      Vp(2)
.PROBE  AC      Vm(2)      Vp(2)
.END

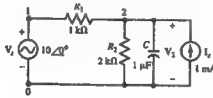
```

يحتوي ملف الخرج على النتائج التالية :

AC ANALYSIS		
FREQ	VM(2)	VP(2)
1.000E + 02	6.149E + 00	-2.273E + 01
1.200E + 03	1.301E + 00	-7.875E + 01
2.300E + 03	6.883E - 01	-8.407E + 01
3.400E + 03	4.670E - 01	-8.598E + 01
4.500E + 03	3.532E - 01	-8.696E + 01
5.600E + 03	2.839E - 01	-8.756E + 01
6.700E + 03	2.374E - 01	-8.796E + 01
7.800E + 03	2.039E - 01	-8.825E + 01
8.900E + 03	1.788E - 01	-8.846E + 01
1.000E + 04	1.591E - 01	-8.863E + 01

وقد رسمت قيم وزاوية وجه V_2 بتفصيل أكثر في شكل 15-27(b).

15.7 إجر تحليل التيار المستمر والتيار المتردد في الدائرة المبينة شكل 15-28 وأوجد القيمة المركبة للجهد V_2 مع تغيير f من 100 Hz إلى 10 kHz في 100 خطوة.



شكل 15-28

ملف المتبع هو :

DC and AC analysis of Fig. 15-28					
Vs	1	0	AC	10	0
Is	0	2	DC	1 mA	
R1	1	2		1 k	
R2	2	0		2 k	
C	2	0		1 μF	
.AC	LN		100	100	10000
.PROBE	VM(2)		VP(2)		
.END					

يحتوي ملف الخرج على البيانات التالية :

SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION			
NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	0.0000	(2)	.6667
VOLTAGE SOURCE CURRENTS			
NAME	CURRENT		
Vs	6.667E - 04		
TOTAL POWER DISSIPATION			
	-0.00E + 00	WATTS	

يتطابق شكل مركبة التيار المستمر للجهد V_2 مع الجهد V_3 للمسألة 15-6 المبينة شكل 15-27(b).

15.8 : ارسم منحنيات التجاوب للدائرة المبينة شكل 15-29(a) لقيم $R = 2, 4, 6, 8, 10 \Omega$.

نقوم بتمثيل المقاومة بمقاومة ذات معامل واحد بقيمة ثابتة R وتغيير لقيمة المعامل R من 2 إلى 10 بخطوة قيمتها 2Ω ونستخدم الأمر AC. لتغير التردد من 500 Hz إلى 3 kHz في 100 خطوة وبذلك

يكون ملف الدخول هو:

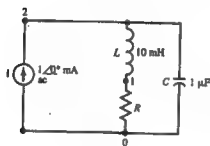
Parallel resonance of practical coil, Fig. 15-29

```

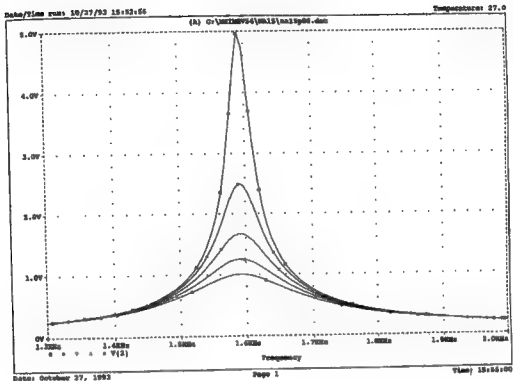
I      0 2      AC      1 m  0
R      0 1      RLOSS   1
L      1 2      10 m
C      0 2      1 u
.MODEL RLOSS RES(R=1)
.STEP  RES RLOSS(R) 2 10 2
.AC    LIN 100 500 3000
.PROBE
.END

```

وبين شكل 15-29(b) منحنيات الرنين بتفصيل أكثر.



(a)



شكل 15-29

15.9 استعمال TRAN ، PROBE. لرسم V_C على طرفى المكثف $1 \mu F$ فى الدائرة الخالية من المتبع لشكل 15-30(a) لقيم $R = 100, 600, 1100, 1600, 2100 \Omega$ والقيمة الابتدائية للجهد $V_C(0) = 10 V$

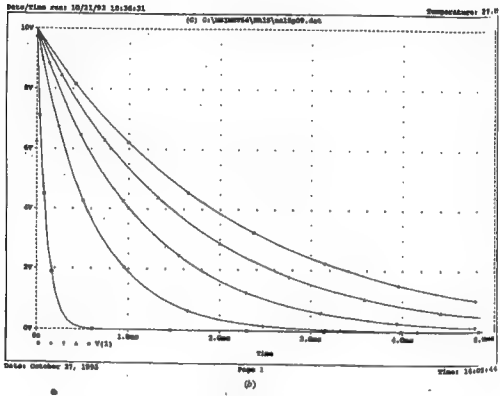
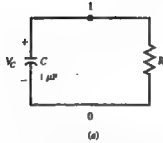
تتغير قيم المقاومة R باستخدام MODEL و STEP.

ملف الدخل هو

Natural response of RC, Fig. 15-30(a)

R	0 1	Rahunt	1
C	1 0	1 uF	IC = 10
MODEL	Rahunt	RES(R = 1)	
STEP	LIN	RES	Rahunt(R) 100 2.1 k 500
.TRAN	1E-4	50E-4	UIC
.PLOT	TRAN	V(1)	
.PROBE			
END			

رسم تغير الجهد V_C مابين شكل 15-30 .



شكل 15-30

15.10 ارسم الجهود بين العقدتين لشكل (a) 15-31 لتجاوب التيار السلمي 1 mA لقيم $R = 100$

. 600, 1100, 1600, 2100 Ω

ملف الدخول هو :

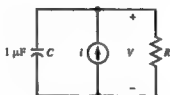
Step response of RC, Fig. 15-31(a)

```

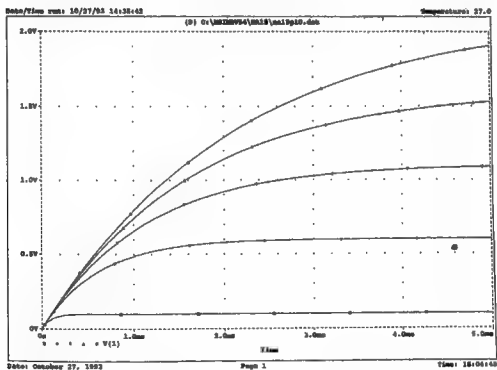
I      0 1      1 m
R      0 1      Rshunt      1
C      1 0      1 uF
.MODEL Rshunt RES(R=1)
.STEP  LIN      RES      Rshunt(R)      100      2.1 k      500
.TRAN  1E-4      50E-4      UIC
.PLOT  TRAN      V(1)
.PROBE
.END

```

وبين شكل 15-31(b) أشكال التجاوبات السلمية.



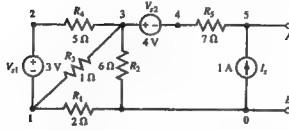
(a)



(b)

شكل 15-31

15.11 أوجد مكافئ ثنين لشكل 15-32 من الطرفين AB .



شكل 15-32

نوجد جهد الدائرة المفتوحة عند AB من تحليل التيار المستمر كما نستخدم TF. لإيجاد مقاومة

الخرج عند AB ويكون ملفا الدخل والخرج هما :

Solution to Fig. 15-32 and Thévenin equivalent at terminal AB

R1	0	1	2	
R2	0	3	6	
R3	1	3	1	
R4	2	3	5	
R5	4	5	7	
Vb1	2	1	DC	3
Vb2	3	4	DC	4
Ib	0	5	DC	1
.TF		V(5)	Vb1	
.END				

ويحتوى ملف الخرج على النتائج التالية :

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	1.2453	(2)	4.2453	(3)	2.2642	(4)	-1.7358
(5)	5.2642						

VOLTAGE SOURCE CURRENTS

NAME	CURRENT
Vb1	-3.962E-01
Vb2	-1.000E+00

TOTAL POWER DISSIPATION 5.19E+00 WATTS

V(5)/Vb1 = 1.132E-01

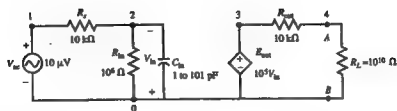
INPUT RESISTANCE AT Vb1 = 3.889E+00

OUTPUT RESISTANCE AT V(5) = 8.925E+00

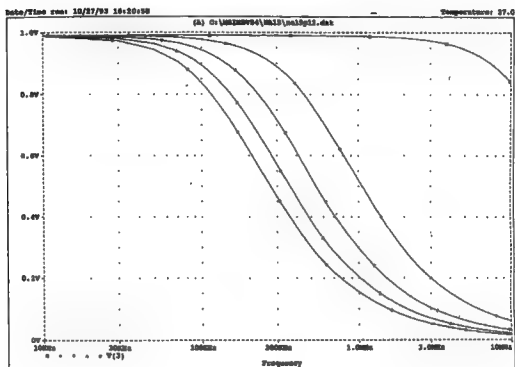
ويكون مكافئ ثنين هو $V_{Th} = V_5 = 5.2642 \text{ V}$ ، $R_{Th} = 8.925 \Omega$.

15.12 أوجد تمحارب التردد V_{AB}/V_{AC} لدائرة المكبر ذو الحلقة المفتوحة لشكل 15-33(a) .

اختبر ملف الدخل التالى مع 500 نقطة التغير للتردد من 10 Hz إلى 100 Hz .



(a)



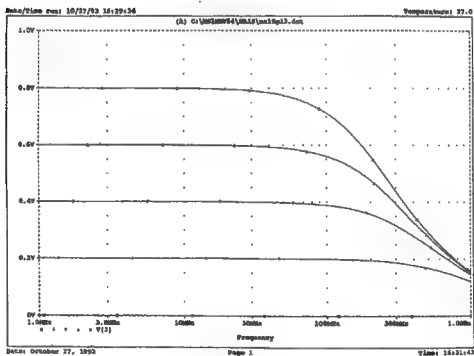
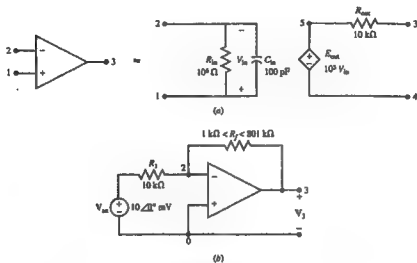
(b)

15-33 ک.ک.ا

Open loop frequency response of amplifier, Fig. 15-33

Rr	1 2	10 k				
Rin	0 2	10 E5				
Cin	0 2	short	1			
Rout	3 4	10 k				
Rl	4 0	10 E9				
Eout	3 0	0 2	1 E5			
Vac	1 0	AC	10 u	0		
.MODEL	short	CAP(C = 1)				
.STEP	LIN	CAP	short(C)	1 pF	101 pF	25 pF
.AC	LIN	500	100	10000 k		
.PROB11						
.END						

رسم تجاوب التردد بالرسم للقيم المتغيرة للتردد من 10 kHz إلى 10 MHz كما هو مبين في شكل 15-33(b).



شكل 15-34

15.13 أكتب نموذجاً لمكبر تشغيل في شكل (a) 15-34 (كدائرة فرعية واستخدمه لإيجاد تجاوب التردد للعلاقة V_3/V_{dc} في شكل (b) 15-34 لتغير f من 1 MHz إلى 1 GHz .

ملف الدخول هو :

Closed loop frequency response of amplifier, Fig. 15-34

```
.SUBCKT OPAMP 1 2 3 4
* node 1 is the non-inverting input
* node 2 is the inverting input
* node 3 is the output
* node 4 is the output reference (negative end of dependent source)
* node 5 is the positive end of dependent source
Rin 1 2 10 E5
Cin 1 2 100 pF
Rout 3 5 10 k
Eout 5 4 1 2 1 E5
.ENDS
Vac 1 0 AC 10 m 0
R1 1 2 10 k
Rf 2 3 Rgain 1
X1 0 2 3 0 OPAMP
.MODEL GAIN RES(R=1)
.STEP LIN RES Rgain(R) 1 k 801 k 200 k
.AC LIN 500 1000 k 1 000 000 k
.PROBE
.END
```

ورسم تجاوب التردد في شكل (c) 15-34 وبالمقارنة مع دائرة الحلقة المفتوحة لشكل (a) 15-33 فإن كسب التيار المستمر يتناقص وعرض النطاق يزداد .

15.14 بالرجوع لدائرة RC لشكل 15-22 اختار ارتفاع النبضة الابتدائية بحيث يصل الجهد على طرفي المكثف 10 V في 0.5 ms وحقق اجابتك برسم V_C عند $0 < t < 2$ ms .

يمكن حساب قيمة النبضة A من العلاقة

$$A = 25.415 \text{ V ومنها } A(1 - e^{-1/2}) = 10$$

ويمكن توصيف منبع الجهد باستخدام الاصطلاح PULSE. ويكون ملف الدخول هو :

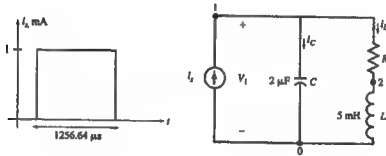
```

Vt      1  0      PULSE(10 25.415 1.0E-6 1.0E-6 0.5m 3m)
R        1  2      1k
C        2  0      1u
.TRAN    1.0E-6    2.0E-3    UIC
.PROBE
.END

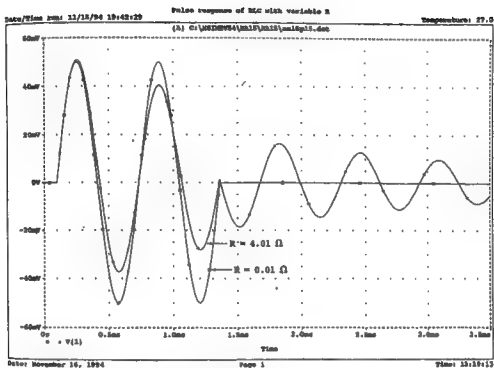
```

وشكل التجاوب مشابهاً لشكل 15-22(b). وأثناء الفترة العابرة لقيم $0 < t < 0.5 \text{ ms}$ فإن الجهد يتزايد أسياً نحو قيمة التيار المستمر المستقرة 25.415 V ومع هذا فإنه عند $t = 0.5 \text{ ms}$ فإن جهد المكثف يصل إلى 10 V وجهد المتبع أيضاً يكون 10 V ويصبح تيار المقاومة صفراً ونصل إلى حالة الاستقرار. 15.15 ارسم الجهد على طرفي المكثف في الدائرة شكل 15-35(a) لقيم 4.01Ω , $R = 0.02 \Omega$ و تيار المتبع 1 mA كنهضة مربعة تستمر 1256.64 μs كما هو مبين في شكل المنحنى $i - t$.

تمثل المقاومة بمقاومة ذات معامل واحد بقيمة ثابتة R ونغير R بالقيم من 0.01 إلى 4.01 بخطوة قيمتها 4. ونستخدم الأمر AC. لتغير التردد من 500 Hz إلى 3 kHz في 100 خطوة. ويكون ملف المتبع هو:



(a)



(b)
15-35, شكل

```

Pulse response of RLC with variable R
Is      0 1      Pulse(0 1 m 100 u 0.01 u 0.01 u 1256.64 u 5000 u)
R       1 2      LOSS      1
C       1 0      2000 n     IC = 0
L       2 0      5 m        IC = 0
.MODEL  LOSS      RES(R = 1)
.STEP   RES      LOSS(R)    .01  4.01  4
.TRAN   10 u     3500 u     0    1 u    UIC
.PROBE
.END

```

(الناتج مبين في شكل 15-35(b)).

عند $R = 0.01 \Omega$ فإن التجاوب العابر يكون تقريباً صفراً ويرجع ذلك إلى الحقيقة بأن عرض النضفة هو مضروب الزمن الدوري للذبذبات الطبيعية للدائرة.

مسائل إضافية

في المسائل التالية استخدم PSpice لإعادة حل المسائل والأمثلة التالية :

- 15.16 حل مثال 5-9 [شكل 5-12] .
- 15.17 حل مثال 5-11 [شكل 5-16] .
- 15.18 حل مثال 5-14 [شكل 5-20] .
- 15.19 حل مثال 5-15 [شكل 5-21] .
- 15.20 حل مثال 5-20 [شكل 5-28] عند $V = 1$ و $x(t) = 1$.
- 15.21 حل مسألة 5-12 (شكل 5-37) .
- 15.22 حل مسألة 5-16 (شكل 5-39) .
- 15.23 حل مسألة 5-25 (شكل 5-48) .
- 15.24 حل مسألة 5-26 (شكل 5-49) .
- 15.25 حل مسألة 5-48 (شكل 5-55) عند $V = 1$ و $v_{s1} = v_{s2}$.
- 15.26 حل مثال 7-3 .
- 15.27 حل مثال 7-6 [شكل 7-12] .
- 15.28 حل مثال 7-7 (شكل 7-13(a)) .
- 15.29 حل مثال 7-11 [شكل 7-17(a)] .
- 15.30 حل مسألة 8-27 (شكل 8-31) .
- 15-31 حل مسألة 9-11 (شكل 9-2(a)) .
- 15-32 حل مسألة 9-18 (شكل 9-28) .

- 15.33 حل مسألة 9-19 (شكل 9-29).
- 15.34 حل مثال 11-5 [شكل 11.15(a)].
- 15.35 حل مثال 11-6 [شكل 11-16].
- 15.36 حل مثال 11-7 [شكل 11-17].
- 15.37 حل مسألة 12-7.
- 15.38 حل مسألة 12-14 (شكل 12-40(a)).
- 15.39 حل مسألة 12-16 (شكل 12-43).
- 15.40 حل مسألة 13-28 (شكل 13-31) لقيمة $z = s$.
- 15.41 حل مسألة 13-31 (شكل 13-33).
- 15.42 حل مسألة 14-8 (شكل 14-24).
- 15.43 حل مسألة 14-12 (شكل 14-28).
- 15.44 حل مسألة 14-13 (شكل 14-29).
- 15.45 حل مسألة 14-20 (شكل 14-35).
- 15.46 حل مسألة 14-21 (شكل 14-36) لقيمة $z = s$.

الفصل السادس عشر

طريقة تحويل لابلاس

16.1 مقدمة

العلاقة بين التجاوب $y(t)$ والإثارة $x(t)$ في دوائر RLC هي معادلة تفاضلية خطية على الصورة .

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m x^{(m)} + \dots + b_1 x^{(1)} + b_0 x \quad (1)$$

حيث $y^{(j)}$ ، $x^{(i)}$ هي المشتقات المسماة بنفس هذه الرموز (j) ، (i) بالنسبة للزمن لكل من $y(t)$ ، $x(t)$ على التوالي . وإذا كانت عناصر الدائرة ثابتة فإن العوامل المناظرة b_i ، a_j للمعادلة التفاضلية ستكون أيضاً ثوابت . وقد تم حل المعادلة التفاضلية في الفصل 7 ، 8 بإيجاد التجاوب الطبيعي والتجاوب القسري . وقد استخدمنا الدالة الأسية المركبة $x(t) = X e^{st}$ وذلك ليشمل الحل تردد مجال s المركب .

ويمكن تلخيص طريقة تحويل لابلاس المشروحة في هذا الفصل بتعميم مفهوم مجال s للمصطلحات الرياضية بحيث يشمل ليس فقط الإثارات الأسية ولكن أيضاً الإثارات الأخرى المتعددة . ومن خلال تحويل لابلاس فإننا نغزل مجموعة كبيرة من الإثارات لمجموعة دوال أسية مركبة ثم نستخدم طريقة التراكب للحصول على التجاوب الكلى .

16.2 تحويل لابلاس

إذا كان $f(t)$ هي دالة زمنية قيمتها صفر عند $t \leq 0$ والتي تكون (تحت تأثير ظروف خاصة) معرفة اختياريًا عند $t > 0$ فإن تحويل لابلاس المباشر للدالة $f(t)$ والتي يرمز لها $\mathcal{L}\{f(t)\}$ تعرف بالتالى :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2)$$

وبذلك يكون الشكل [٤] يعنى تحويل $f(t)$ والتي تكون فى مجال الزمن إلى $F(s)$ وهو مجال التردد المركب أو باختصار مجال s حيث s هى المتغير المركب $\sigma + j\omega$. وبينما يبدو أن التكامل سيكون صعباً فإن طريقة تحويلات لابلاس التى تستخدم الجداول التى تغطى كل الدوال المحتمل تواجدها فى نظريات الدوائر الأسمى تعد حلاً سهلاً .

ومن المزايا الفريدة لهذا التحويل أنه إذا كان $f_1(t)$ ، $f_2(t)$ لهما نفس الصورة $F(s)$ فى مجال s فإن $f_1(t) = f_2(t)$ وهذا يسمح أيضاً بعكس الترتيب من مجال s إلى مجال الزمن وهى تسمى تحويل لابلاس المعكوس $[F(t)] = f(t)$. ويمكن أيضاً التعبير عن تحويل لابلاس المعكوس بالتكامل وهو التكامل المعكوس المركب .

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (3)$$

فى (3) نجد أن مسار التكامل يكون خطاً مستقيماً موازياً لمحور $j\omega$ بحيث تقع جميع أقطاب $F(s)$ على يسار الخط . وهنا مرة أخرى لا حاجة لإجراء التكامل إذا لم يكن هناك سؤال خاص لإضافته إلى حدود أزواج التحويل المعرفة بالجدول السابق .

ويجب ملاحظة أنه عند استخدام تحويل لابلاس المباشر بالنسبة للكميات الطبيعية فإن ذلك سيضيف وحدة زمن إضافية فى الناتج . فمثلاً إذا كان $f(t)$ يعبر عن التيار بالأمبير (A) فإن $I(s)$ يجب أن تكون A.s (أو C) . ولأن وحدة s الإضافية سوف تهمل عند استخدام تحويل لابلاس المعكوس فإننا غالباً ما نتجاهل ذلك بالرجوع للوحدات الأصلية فى مجال s مثل التيار $I(s)$ ويحدد باتجاهه .

16.3 تحويلات لابلاس المختارة

يمكن الحصول بسهولة على تحويل لابلاس بالنسبة لدالة الوحدة السلمية :

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} (1) e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

نظراً لأن تحويل لابلاس خطى فإن $V(t) = V u(t)$ فى مجال الزمن له الصورة $V(s) = V/s$ فى مجال s .

والدالة الأسية المتناقصة والتي غالباً ما تكون كما في الفصل 7 هي الأخرى دالة يمكن تحويلها كالتالي :

$$\mathcal{L}[Ae^{-at}] = \int_0^{\infty} Ae^{-at} e^{-st} dt = \frac{-A}{a+s} [e^{-(a+s)t}]_0^{\infty} = \frac{A}{s+a}$$

ويكون المعكوس :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s+a}\right] = Ae^{-at}$$

ويمكن الحصول أيضاً على تحويل الدالة الجيبية بسهولة كالتالي :

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \int_0^{\infty} (\sin \omega t) e^{-st} dt = \left[\frac{-s(\sin \omega t) e^{-st} - e^{-st} \omega \cos \omega t}{s^2 + \omega^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

ومن المفيد حالياً الحصول على تحويل المشتقة $df(t)/dt$:

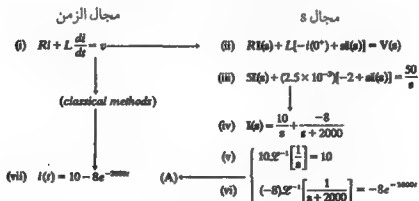
$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

وبإجراء التكامل عن طريق التقسيم :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = [e^{-st} f(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-se^{-st}) dt = -f(0^+) + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = -f(0^+) + sF(s)$$

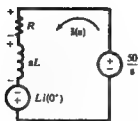
وتوجد مجموعة صغيرة من أزواج التحويلات والتي تشمل أيضاً ما ذكر سابقاً في جدول 16-1 . والخمس أسطر الأخيرة في الجدول تمثل بعض الخواص العامة لتحويل لابلاس .

مثال 16.1 : اعتبر دائرة التوالي RL بها $R = 5 \Omega$ ، $L = 2.5 \text{ mH}$. وعند الزمن $t = 0$ حينما كان التيار 2 A وصل منبع 50 V . والدائرة في مجال الزمن هي المبينة شكل 16-1 .

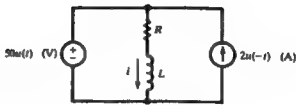


جدول 16-1
أزواج تحويلات لابلاس

	$f(t)$	$F(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$
3.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
4.	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
5.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
7.	$\sin (\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
8.	$\cos (\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
9.	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
10.	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
11.	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
12.	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
13.	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^+)$
14.	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
15.	$f(t - t_1)$	$e^{-st_1}F(s)$
16.	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
17.	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$	$F_1(s)F_2(s)$



شكل 16-2



شكل 16-1

باستخدام قانون كيرشوف للجهد للدائرة عند $t > 0$ ينتج المعادلة التفاضلية المعروفة (i) وتحول هذه المعادلة حداً لحداً لـ s للحصول على (ii) ويصبح التيار المجهول $i(t)$ هو التيار $I(s)$ بينما يتحول الجهد المعروف $u = 50 \mu(t)$ إلى $50/s$ وأيضاً تحول di/dt إلى $sI(s) - i(0^+)$. والتي فيها $i(0^+) = 2$ A . ثم نحل المعادلة (iii) بالنسبة لـ $I(s)$ ويوضح الحل في الشكل (iv) بطريقة بند 16-6 وتستخدم الأسطر 1 ، 3 ، 16 في جدول 16-1 للحصول على معكوس لابلاس $I(s)$ والتي هي $i(t)$.

ويمكن رسم الدائرة في مجال s كما هو مبين شكل 16-2 . ويظهر التيار الابتدائي في الدائرة كمنبع جهد $Li(0^+)$ وينشئ تيار مجال s الجهد $RI(s)$ ، $sLI(s)$ في (ii) كتيارات متجهة I وتنشئ المعاوقة Z الجهد المتجه IZ .

16.4 تقارب التكامل

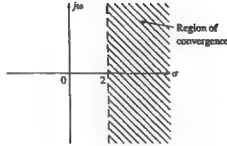
لكي يتواجد تحويل لابلاس فإن التكامل (2) يجب أن يتقارب . وهذا يجعل المتغير $s = \sigma + j\omega$ جزء من المستوى المركب يسمى مدى التقارب . وكمثال فإن التحويل $x(t) = e^{-at}u(t)$ هو $1/(s + a)$ بشرط أن $\text{Re}[s] > -a$ والتي تعرف بمدى التقارب .

مسألة 16.2 : أوجد تحويل لابلاس للدالة $x(t) = 3e^{2t}u(t)$ وبين مدى التقارب .

$$X(s) = \int_0^{\infty} 3e^{2t}e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 3e^{-(s-2)t} dt = \frac{3}{s-2} [e^{-(s-2)t}]_0^{\infty} = \frac{3}{s-2}, \quad \text{Re}[s] > 2$$

مدى التقارب للدالة $X(s)$ هي النصف الأيمن للمستوى $\sigma > 2$ والمبين بالجزء المخطط لشكل

16-3



شكل 16-3

16.5 نظريتي القيمة الابتدائية والقيمة النهائية

بأخذ $s \rightarrow \infty$ (بالنسبة للقيم الحقيقية) لتحويل لابلاس للمشتقة $dt(t)/dt$.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} \{sF(s) - f(0^+)\}$$

ولكن e^{-st} في التكامل تقترب من صفر كلما $s \rightarrow \infty$ ولذلك :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \{sF(s) - f(0^+)\} = 0$$

وحيث أن $f(0^+)$ ثابت فيمكن كتابة :

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \{sF(s)\}$$

والتي تكون البيان لنظرية القيمة الابتدائية :

مثال 16.3 : في مثال 16-1.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \{sI(s)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(10 - \frac{8s}{s+2000} \right) = 10 - 8 = 2$$

والذي يكون في الحقيقة هو التيار الابتدائي $i(0^+) = 2$ A.

ويمكن أيضاً إيجاد نظرية القيمة النهائية من تحويل لابلاس المباشرة للمشتقة ولكن يؤخذ $s \rightarrow 0$ (من خلال قيم حقيقية).

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \{sF(s) - f(0^+)\}$$

ولكن

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} df(t) = f(\infty) - f(0^+)$$

وحيث أن $f(0^+)$ ثابت لذلك :

$$f(\infty) - f(0^+) = -f(0^+) + \lim_{s \rightarrow 0} \{sF(s)\}$$

or

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \{sF(s)\}$$

وهذا هو بيان نظرية القيمة النهائية . ويمكن تطبيق النظرية فقط حينما تحتوى جميع الأقطاب للدالة $sF(s)$ على مقادير حقيقية سالبة . وبذلك لا تشمل التحويلات للدوال مثل e^t ، $\cos t$ والتي تؤول إلى ما لا نهاية أو قيم محددة عندما $t \rightarrow \infty$.

16.6 مفكوك الكسور الجزئية

فى تحليل الدوائر فى المسائل يمكن أن تكون القيمة المجهولة إما التيار $i(t)$ أو الجهد $v(t)$. وفى مجال s فستكون $I(s)$ أو $V(s)$ بالنسبة للدوائر التى درست فى هذا الكتاب وستكون دالة جدرية على الصورة :

$$R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

بحيث أن متعدد الحدود $Q(s)$ يكون برتبة أعلى من $P(s)$. وعلاوة على ذلك فإن $R(s)$ تكون حقيقية لقيم s الحقيقية وبالتالي فإن أى أقطاب غير حقيقية للدالة $R(s)$ أى جذور غير حقيقية للمعادلة $Q(s) = 0$ يجب أن تحدث على شكل أزواج مركبة مترافقة .

وفى مفكوك الكسور الجزئية فإن الدالة $R(s)$ تقسم إلى كسور جذرية بسيطة وتسمى الأجزاء الرئيسية فيكون لكل قطب للدالة $R(s)$ جزء رئيسى خاص به .

الحالة 1 : $s = a$ وهى قطب بسيط : حينما $s = a$ وهو جذر غير مكرر للمعادلة $Q(s) = 0$ فإن الجزء الرئيسى للدالة $R(s)$ هو :

$$\frac{A}{s-a} \quad \text{where} \quad A = \lim_{s \rightarrow a} \{(s-a)R(s)\}$$

وإذا كانت a حقيقية فكذلك ستكون A وإذا كانت a مركبة فإن a^* ستكون أيضاً قطباً بسيطاً ومقام
جزئه الرئيسي A^* . لاحظ أنه إذا كان $a = 0$ فإن A ستكون القيمة النهائية للدالة $r(t)$.

الحالة 2 : $s \approx b$ وهي قطب مزدوج. حينما $s = b$ جذراً مزدوجاً للمعادلة $Q(s) = 0$ فإن الجزء

الرئيسي المناظر يكون :

$$\frac{B_1}{s-b} + \frac{B_2}{(s-b)^2}$$

حيث يمكن إيجاد الثابتين B_1 ، B_2 كالآتي :

$$B_2 = \lim_{s \rightarrow b} \{(s-b)^2 R(s)\} \quad \text{and} \quad B_1 = \lim_{s \rightarrow b} \left\{ (s-b) \left[R(s) - \frac{B_2}{(s-b)^2} \right] \right\}$$

B_1 يمكن أن تكون صفراً ومشابهة للحالة 1 فإن B_1 ، B_2 حقيقيان إذا كانت b حقيقية وهذا
الثابتان للقطب المزدوج b^* هما المرافقان لتلك الخاص بالقيمة b .

ويمكن الحصول على الجزء الرئيسي للأقطاب الأعلى بالرجوع للحالة 2. ومع ذلك سنفترض أن
 $R(s)$ ليس لها مثل هذه الأقطاب. وبمجرد معرفة مفكوك الكسور الجزئية للدالة $R(s)$ فإننا نستعمل
جدول 16-1 لتحويل كل حد وبالتالي للحصول على دالة الزمن $r(t)$.

مثال 16.4 : أوجد التيار $i(t)$ في مجال الزمن إذا كان تحويل لابلاس له :

$$I(s) = \frac{s-10}{s^2 + s^2}$$

$$I(s) = \frac{s-10}{s^2(s-j)(s+j)}$$

ويتحليل المقام

نجد أن أقطاب $I(s)$ هي $s = 0$ (قطب مزدوج) ، $s = \pm j$ (أقطاب بسيطة).

الجزء الرئيسي عند $s = 0$ هو :

$$\frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{10}{s^2}$$

since

$$B_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s-10}{(s-j)(s+j)} \right] = -10$$

$$B_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s \left[\frac{s-10}{s^2(s^2+1)} + \frac{10}{s^2} \right] \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{10s+1}{s^2+1} \right) = 1$$

الجزء الرئيسي عند $s = 4$ هو :

$$\frac{A}{s-j} = \frac{0.5+j5}{s-j}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow j} \left[\frac{s-10}{s^2(s+j)} \right] = -(0.5+j5)$$

ويتبع ذلك مباشرة أن الجزء الرئيسي عند $s = -j$ هو :

$$= \frac{0.5-j5}{s+j}$$

مفكوك الكسور الجزئية للمعادلة $I(s)$ ستكون بالتالي :

$$I(s) = \frac{1}{s} - 10 \frac{1}{s^2} - (0.5+j5) \frac{1}{s-j} - (0.5-j5) \frac{1}{s+j}$$

وباستخدام جدول 16-1 للتحويل حداً حداً فإن :

$$i(t) = 1 + 10t - (0.5+j5)e^{jt} - (0.5-j5)e^{-jt} = 1 + 10t - (\cos t - 10 \sin t)$$

قانون مفكوك هيفيسايد

إذا كانت جميع أقطاب $R(s)$ بسيطة فإنه يمكن إيجاد مفكوك الكسور الجزئية ونحويلات الحدود

في خطوة واحدة كالتالي :

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t} \quad (4)$$

حيث $s = s_k$ هي الأقطاب $Q'(s_k)$ هي $dQ(s)/ds$ عند $s = s_k$.

16.7 الدوائر في مجال s

استخدمنا في الفصل 8 اعتبارات الخاصة بالمعاوقة العامة والمساحية ودوال التحويل كدوال

للتردد المركب s . وفي هذا البند نقوم بتوسيع استخدام التردد المركب لتحويل دائرة RLC المحتوية

على المتابع والحالات الابتدائية من مجال الزمن إلى مجال s .

جدول 16-2

Time Domain	s-Domain	s-Domain Voltage Term
$i \rightarrow \text{---} R \text{---}$	$I(s) \rightarrow \text{---} R \text{---}$	$R I(s)$
$i \rightarrow \text{---} L \text{---} \rightarrow i(0^+)$	$I(s) \rightarrow \text{---} sL \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} \bigcirc \text{---} L i(0^+)$	$sL I(s) + L i(0^+)$
$i \rightarrow \text{---} L \text{---} \leftarrow i(0^+)$	$I(s) \rightarrow \text{---} sL \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} \bigcirc \text{---} L i(0^+)$	$sL I(s) + L i(0^+)$
$i \rightarrow \text{---} C \text{---} + V_0$	$I(s) \rightarrow \text{---} \frac{1}{sC} \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} \bigcirc \text{---} \frac{V_0}{s}$	$\frac{I(s)}{sC} + \frac{V_0}{s}$
$i \rightarrow \text{---} C \text{---} - V_0$	$I(s) \rightarrow \text{---} \frac{1}{sC} \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} \bigcirc \text{---} \frac{V_0}{s}$	$\frac{I(s)}{sC} - \frac{V_0}{s}$

يعرض جدول 16-2 الحدود المطلوبة لإنشاء صورة مجال s لدائرة معطاه في مجال الزمن والحدود الثلاثة الأولى للجدول سبق ذكرها في مثال 16-1 وبالنسبة للمكثف فإنه عند $t > 0$.

$$v_C(t) = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

وبالتالي فإنه من جدول 16-1 :

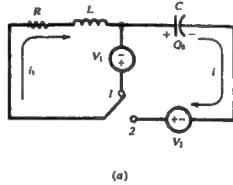
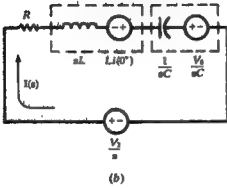
$$V_C(s) = \frac{V_0}{s} + \frac{I(s)}{sC}$$

مثال 16.5 : في الدائرة المبينة شكل 16-4(a) إنشئ التيار الابتدائي i_1 حينما كان المفتاح عند الوضع 1 . وعند $t = 0$ تحرك إلى الوضع 2 بحيث يسمح لدخول الدائرة للمكثف مع شحنة ابتدائية Q_0 ومنبع جهد ثابت V_2 .

الدائرة في مجال s مبنية شكل (b) 16-4 والمعادلة في مجال s هي :

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) + \frac{V_0}{sC} + \frac{V_2}{s} = \frac{V_2}{s}$$

والتي بها $i(0^+) = i_1 = V_1/R$ ، $V_0 = Q_0/C$



شكل 16-3

مسائل محلولة

16.1 أوجد تحويل لابلاس للدالة $\cos \omega t e^{-at}$ حيث a مقدار ثابت .

باستخدام معادلة التعريف $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$ للدالة المعطى نحصل على :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] &= \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-(s+a)t} dt \\ &= \left[\frac{-(s+a) \cos \omega t e^{-(s+a)t} + e^{-(s+a)t} \omega \sin \omega t}{(s+a)^2 + \omega^2} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

16.2 إذا كان $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ بين أن $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$ واستخدم هذه النتيجة للمسألة 16-1 .

من التعريف

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \int_0^{\infty} [e^{-at} f(t)] e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s+a)t} dt = F(s+a) \quad (5)$$

بتطبيق (5) للسطر 6 فى جدول 16-1 يعطى :

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos at] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + a^2}$$

وهو كما سبق فى المسألة 16-1 .

16.3 أوجد تحويل لابلاس للمعادلة $f(t) = 1 - e^{-at}$ حيث a مقدار ثابت .

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[1 - e^{-at}] &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-at})e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt - \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} + \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}\end{aligned}$$

طريقة أخرى :

$$\mathcal{L}\left[a \int_0^t e^{-at} d\tau\right] = a \frac{1/(s+a)}{s} = \frac{a}{s(s+a)}$$

16.4 أوجد :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 - a^2)}\right]$$

باستعمال طريقة الكسور الجزئية .

$$\frac{1}{s(s^2 - a^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} + \frac{C}{s-a}$$

والمعاملات هى :

$$A = \frac{1}{s^2 - a^2} \Big|_{s=0} = -\frac{1}{a^2} \quad B = \frac{1}{s(s-a)} \Big|_{s=-a} = \frac{1}{2a^2} \quad C = \frac{1}{s(s+a)} \Big|_{s=a} = \frac{1}{2a^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 - a^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/a^2}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2a^2}{s+a}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2a^2}{s-a}\right] \quad \text{لذلك}$$

ودوال الزم المناظرية توجد من جدول 16-1 .

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 - a^2)}\right] &= -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} e^{-at} + \frac{1}{2a^2} e^{at} \\ &= -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{a^2} (\cosh at - 1)\end{aligned}$$

طريقة أخرى :

من السطرين 11 ، 14 لجدول 16-1 فإن :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/(s^2 - a^2)}{s}\right] = \int_0^t \frac{\sinh at}{a} d\tau = \left[\frac{\cosh at}{a^2}\right]_0^t = \frac{1}{a^2}(\cosh at - 1)$$

16.5 أوجد :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right]$$

باستعمال طريقة الكسور الجزئية نحصل على :

$$\frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{(s+2)^2}$$

Then $A = \frac{s+1}{(s+2)^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{4}$ $B_2 = \frac{s+1}{s} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2}$

and $B_1 = (s+2) \frac{s+1}{(s+2)^2} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4}$

Hence $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{4}}{s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2}\right]$

ودوال الزمن المناظرة من جدول 16-1 كالتالى :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t}$$

16.6 لدائرة التوالى RC المبينة شكل 16-5 كانت الشحنة الابتدائية للمكثف 2.5 mC وعند $t = 0$ أقفل

المفتاح ووصل منبع جهد ثابت $V = 100$ V . استخدم طريقة تحويل لابلاس لإيجاد التيار .

معادلة مجال الزمن للدائرة المعطاه بعد قفل المفتاح :

$$RK(t) + \frac{1}{C} \left[Q_0 + \int_0^t k(\tau) d\tau \right] = V$$

or $10k(t) + \frac{1}{50 \times 10^{-6}} \left[(-2.5 \times 10^{-3}) + \int_0^t k(\tau) d\tau \right] = V$ (6)

الشحنة Q_0 معاكسة للشحنة من ناحية القطبية بالنسبة للشحنة التى يسببها المنبع على المكثف

وبأخذ تحويل لابلاس للمحدود فى معادلة (6) نحصل على معادلة مجال s التالية :

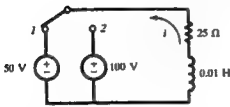
$$10I(s) = \frac{2.5 \times 10^{-3}}{50 \times 10^{-6}s} + \frac{I(s)}{50 \times 10^{-6}s} = \frac{100}{s}$$

or

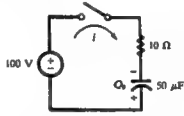
$$I(s) = \frac{15}{s + (2 \times 10^3)} \quad (7)$$

والآن نحصل على دالة الزمن بأخذ معكوس تحويل لابلاس لمعادلة (7)

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{15}{s + (2 \times 10^3)} \right] = 15e^{-2 \times 10^3 t} \quad (A) \quad (8)$$



شكل 16-6



شكل 16-5

16.7 في دائرة RL المبينة شكل 16.6 كان المفتاح في الوضع 1 مدة طويلة كافية للوصول إلى حالة الاستقرار وعند $t = 0$ وصل بالنقطة 2. أوجد التيار الناتج.

افترض اتجاه التيار كما هو في الرسم. وبالتالي فإن التيار الابتدائي $i_0 = -50/75 = 2 \text{ A}$.

معادلة مجال الزمن هي :

$$25i + 0.01 \frac{di}{dt} = 100 \quad (9)$$

وبأخذ تحويل لابلاس للمعادلة (9).

$$25I(s) + 0.01sI(s) - 0.01i(0^+) = 100/s \quad (10)$$

وبالتعويض لقيمة $i(0^+)$

$$25I(s) + 0.01sI(s) + 0.01(2) = 100/s \quad (11)$$

$$I(s) = \frac{100}{s(0.01s + 25)} - \frac{0.02}{0.01s + 25} = \frac{10^4}{s(s + 2500)} - \frac{2}{s + 2500} \quad (12)$$

وأيضاً

وباستخدام طريقة الكسور الجزئية فإن :

$$\frac{10^4}{s(s + 2500)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2500} \quad (13)$$

$$A = \frac{10^4}{s + 2500} \Big|_{s=0} = 4 \quad \text{and} \quad B = \frac{10^4}{s} \Big|_{s=-2500} = -4 \quad \text{ومع}$$

$$I(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s + 2500} - \frac{2}{s + 2500} = \frac{4}{s} - \frac{6}{s + 2500} \quad \text{فإن} \quad (14)$$

ويأخذ معكوس تحويل لابلاس للمعادلة (14) نحصل على $i = 4 - 6e^{-2500t}$ (A).

16.8 في دائرة التوالي RL لشكل 16-7 وصل جهداً أسياً $v = 50e^{-100t}$ (V) وذلك بقلب المفتاح عند $t = 0$. أوجد التيار الناتج.

معادلة التيار في مجال الزمن هي :

$$Ri + L \frac{di}{dt} = v \quad (15)$$

وفي مجال s معادلة (15) تأخذ الصورة :

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) = V(s) \quad (16)$$

وبالتعويض بثوابت الدائرة وبتحويل المنبع $V(s) = 50/(s + 100)$ في (16) .

$$10I(s) + s(0.2)I(s) = \frac{50}{s + 100} \quad \text{or} \quad I(s) = \frac{250}{(s + 100)(s + 50)} \quad (17)$$

وبقانون مفكوك هيفيسايد

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \sum_{n=1,2} \frac{P(s_n)}{Q'(s_n)} e^{s_n t}$$

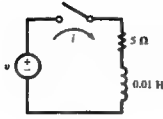
Here, $P(s) = 250$, $Q(s) = s^2 + 150s + 5000$, $Q'(s) = 2s + 150$, $s_1 = -100$, and $s_2 = -50$. Then,

$$i = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \frac{250}{-50} e^{-100t} + \frac{250}{50} e^{-50t} = -5e^{-100t} + 5e^{-50t} \quad (A)$$

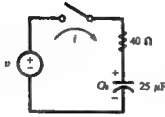
16.9 دائرة التوالي RC لشكل 16-8 بها منبع جهد جيبي $v = 180 \sin(2000t + \phi)$ (V) وشحنة

ابتدائية على المكثف $Q_0 = 1.25 \text{ mC}$ بالقطبية المبينة . أوجد التيار إذا أقفل المفتاح عند الزمن

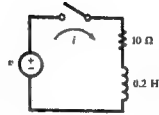
المناظر لقيمة $\phi = 90^\circ$.



شكل 16-9



شكل 16-8



شكل 16-7

معادلة مجال الزمن للدائرة هي :

$$40i(t) + \frac{1}{25 \times 10^{-6}} \left[(1.25 \times 10^{-3}) + \int_0^t i(\tau) d\tau \right] = 180 \cos 2000t \quad (18)$$

يعطى تحويل لابلاس للمعادلة (18) المعادلة في مجال s .

$$(19) \quad 40I(s) + \frac{1.25 \times 10^{-3}}{25 \times 10^{-6}s} + \frac{4 \times 10^4}{s} I(s) = \frac{180s}{s^2 + 4 \times 10^4}$$

$$(20) \quad I(s) = \frac{4.5s^2}{(s^2 + 4 \times 10^4)(s + 10^3)} - \frac{1.25}{s + 10^3} \quad \text{أو}$$

وبتطبيق قانون مفكوك هيفيسايد للحد الأول على اليمين في (20) نحصل على $P(s) = 4.5s^2$ ،

$$a_1 = -j2 \times 10^3 , \quad Q'(s) = 3s^2 + 2 \times 10^3s + 4 \times 10^6 , \quad Q(s) = s^3 + 10^3s^2 + 4 \times 10^6s + 4 \times 10^9$$

$$: \quad \text{وبالتالي فإن } a_3 = -10^3 , \quad a_2 = -j2 \times 10^3 , \quad 10^3$$

$$\begin{aligned} i &= \frac{P(-j2 \times 10^3)}{Q'(-j2 \times 10^3)} e^{-j2 \times 10^3 t} + \frac{P(j2 \times 10^3)}{Q'(j2 \times 10^3)} e^{j2 \times 10^3 t} + \frac{P(-10^3)}{Q'(-10^3)} e^{-10^3 t} - 1.25 e^{-10^3 t} \\ &= (1.8 - j0.9) e^{-j2 \times 10^3 t} + (1.8 + j0.9) e^{j2 \times 10^3 t} - 0.35 e^{-10^3 t} \\ &= -1.8 \sin 2000t + 3.6 \cos 2000t - 0.35 e^{-10^3 t} \\ &= 4.02 \sin (2000t + 116.6^\circ) - 0.35 e^{-10^3 t} \quad (\text{A}) \end{aligned} \quad (21)$$

عند $t = 0$ يعطى التيار بالجهد اللحظى وهو عبارة عن جهد المنبع وجهد المكثف المشحون مقسوماً

بالمقاومة وبالتالي :

$$i_0 = \left(180 \sin 90^\circ - \frac{1.25 \times 10^{-3}}{25 \times 10^{-6}} \right) / 40 = 3.25 \text{ A}$$

ونفس النتيجة نحصل عليها إذا وضعنا $t = 0$ في (21).

16.10 فى دائرة التوالي RL لشكل 16.9 كان الجهد (V) $v = 100 \sin(500t + \phi)$. أوجد التيار الناتج إذا أقفل المفتاح عند الزمن المناظر للزاوية $\phi = 0$.

معادلة دائرة التوالي RL فى مجال s هى :

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) = V(s) \quad (22)$$

تحويل المنبع من $\phi = 0$ هو :

$$V(s) = \frac{(100)(500)}{s^2 + (500)^2}$$

وحيث أنه لا يوجد تيار ابتدائى فى الملف $Li(0^+) = 0$. ويتعويض ثوابت الدائرة فى (22) وبفك

$$5I(s) + 0.01 sI(s) = \frac{5 \times 10^4}{s^2 + 25 \times 10^4} \quad \text{or} \quad I(s) = \frac{5 \times 10^4}{(s^2 + 25 \times 10^4)(s + 500)} \quad (23)$$

وبفك (23) بالكسور الجزئية .

$$I(s) = 5 \left(\frac{-1+j}{s+j500} \right) + 5 \left(\frac{-1-j}{s-j500} \right) + \frac{10}{s+500} \quad (24)$$

وتحويل لابلاس المعكوس للمعادلة (24) هو :

$$i = 10 \sin 500t - 10 \cos 500t + 10e^{-500t} = 10e^{-500t} + 14.14 \sin(500t - 45^\circ) \quad (A) \quad (25)$$

16.11 أعد حل المسألة 16-10 بأخذ دالة الجهد كما يلى :

$$v = 100e^{j500t} \quad (V) \quad (25)$$

والآن $V(s) = 100 / (s - j500)$ ، ومعادلة مجال s هى :

$$5I(s) + 0.01 sI(s) = \frac{100}{s - j500} \quad \text{or} \quad I(s) = \frac{10^4}{(s - j500)(s + 500)}$$

وباستخدام الكسور الجزئية

$$I(s) = \frac{10-j10}{s-j500} + \frac{-10+j10}{s+500}$$

وبالمعكوس

$$i = (10-j10)e^{j500t} + (-10+j10)e^{-500t} = 14.14e^{j(500t-45^\circ)} + (-10+j10)e^{-500t} \quad (A) \quad (26)$$

والجهد هو الجزء التخيلي لمعادلة (25) ولذلك فإن التيار الحقيقي هو الجزء التخيلي من المعادلة (26).

$$i = 14.14 \sin(500t - \pi/4) + 10e^{-300t} \text{ (A)}$$

16.12 لدائرة التوالي RLC المبينة شكل 16-10 لا توجد شحنة ابتدائية على المكثف . وإذا أقفل المفتاح عند $t = 0$. أوجد التيار الناتج .

معادلة الدائرة في مجال الزمن هي :

$$RI + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = V \quad (27)$$

ولأن $i(0^+) = 0$ فإن تحويل لابلاس للمعادلة (27) هو :

$$RI(s) + sLI(s) + \frac{1}{sC} I(s) = \frac{V}{s} \quad (28)$$

$$2I(s) + 1sI(s) + \frac{1}{0.5s} I(s) = \frac{50}{s} \quad \text{أو} \quad (29)$$

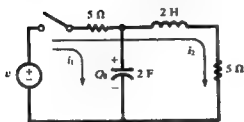
$$I(s) = \frac{50}{s^2 + 2s + 2} = \frac{50}{(s+1+j)(s+1-j)} \quad \text{وبالتالي} \quad (30)$$

بفك المعادلة (30) بالكسور الجزئية

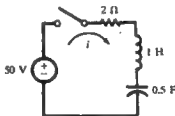
$$I(s) = \frac{j25}{(s+1+j)} - \frac{j25}{(s+1-j)} \quad (31)$$

ومعكوس تحويل لابلاس للمعادلة (31) يعطى :

$$i = j25\{e^{-(1-j)t} - e^{-(1+j)t}\} = 50e^{-t} \sin t \text{ (A)}$$



شكل 16-11



شكل 16-10

16.13 للشبكة ذات الشبكتين لشكل 16-11 تم اختيار التيارين كما هو مبين. أكتب معادلات مجال s في شكل مصفوفة وأنشئ الدائرة المناظرة.

بكتابة مجموعة المعادلات في مجال الزمن فإن:

$$5i_1 + \frac{1}{2} \left[Q_0 + \int_0^t i_1(\tau) d\tau \right] + 5i_2 = v \quad \text{and} \quad 10i_2 + 2 \frac{di_2}{dt} + 5i_1 = v \quad (32)$$

وبأخذ تحويل لابلاس للمعادلة (32) للحصول على المعادلات المناظرة في مجال s .

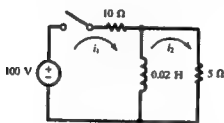
$$5I_1(s) + \frac{Q_0}{2s} + \frac{1}{2s} I_1(s) + 5I_2(s) = V(s) \quad 10I_2(s) + 2sI_2(s) - 2i_2(0^+) + 5I_1(s) = V(s) \quad (33)$$

ولكي تأخذ هذه المعادلات شكلها في شكل المصفوفة فإن:

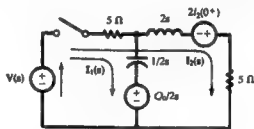
$$\begin{bmatrix} 5 + (1/2s) & 5 \\ 5 & 10 + 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(s) - (Q_0/2s) \\ V(s) + 2i_2(0^+) \end{bmatrix}$$

الدائرة المطلوبة في مجال s يمكن إيجادها باختيار مصفوفات $Z(s)$ ، $I(s)$ ، $V(s)$ (انظر شكل

16-12).



شكل 16-13



شكل 16-12

16.14 للشبكة ذات الشبكتين لشكل 16-13 أوجد التيارات التي تنتج حينما يقفل المفتاح.

معادلات مجال الزمن للشبكة هي:

$$\begin{aligned} 10i_1 + 0.02 \frac{di_1}{dt} - 0.02 \frac{di_2}{dt} &= 100 \\ 0.02 \frac{di_2}{dt} + 5i_2 - 0.02 \frac{di_1}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

ويأخذ تحويل لابلاس للمعادلة (34).

$$(10 + 0.02s)I_1(s) - 0.02sI_2(s) = 100/s \quad (5 + 0.02s)I_2(s) - 0.02sI_1(s) = 0 \quad (35)$$

ومن المعادلة الثانية فى معادلتى (35) نجد أن :

$$I_2(s) = I_1(s) \left(\frac{s}{s + 250} \right) \quad (36)$$

والتي حينما نعوض بها فى المعادلة الأولى نحصل على :

$$I_1(s) = 6.67 \left[\frac{s + 250}{s(s + 166.7)} \right] = \frac{10}{s} - \frac{3.33}{s + 166.7} \quad (37)$$

وبعكس (37) .

$$i_1 = 10 - 3.33 e^{-166.7t} \quad (A)$$

وأخيراً عوض (37) فى (36) للحصول على :

$$I_2(s) = 6.67 \left(\frac{1}{s + 166.7} \right) \quad \text{whence} \quad i_2 = 6.67 e^{-166.7t} \quad (A)$$

16.15 باستخدام نظرية القيمة الابتدائية والقيمة النهائية فى المسألة 14-16 .

تعطى القيمة الابتدائية للتيار i_1 بالقيمة :

$$i_1(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s I_1(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[6.67 \left(\frac{s + 250}{s + 166.7} \right) \right] = 6.67 \text{ A}$$

والقيمة النهائية :

$$i_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s I_1(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[6.67 \left(\frac{s + 250}{s + 166.7} \right) \right] = 10 \text{ A}$$

القيمة الابتدائية للتيار i_2 هى :

$$i_2(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s I_2(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[6.67 \left(\frac{s}{s + 166.7} \right) \right] = 6.67 \text{ A}$$

والقيمة النهائية هى :

$$i_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s I_2(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[6.67 \left(\frac{s}{s + 166.7} \right) \right] = 0$$

وبفحص شكل 16-13 نتحقق من كل من القيمة الابتدائية والنهائية السابقة . ويعطى الملف معارقة ما لا نهاية عند لحظة القفل . وتكون التيارات $i_1 = i_2 = 100 / (10 + 5) = 6.67 \text{ A}$. وبالتالي فإنه فى الحالة المستقرة يبدو الملف كما لو كان مقصوراً وبالتالي فإن $i_1 = 10 \text{ A}$ ، $i_2 = 0$.

16.16 حل لإيجاد قيمة i_1 فى المسألة 16-14 وذلك بإيجاد الدائرة المكافئة فى مجال s .

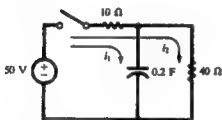
تكون معاوقة الملف (0.02 H) هى $Z(s) = 0.025$. وبالتالي فإن المعاوقة المكافئة للشبكة من ناحية المنبع هى :

$$Z(s) = 10 + \frac{(0.02s)(5)}{0.02s + 5} = 15 \left(\frac{s + 166.7}{s + 250} \right)$$

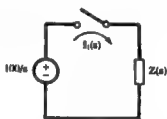
والدائرة المكافئة فى مجال s كما هو مبين شكل 16-14 وبالتالي فإن التيار يكون :

$$I_1(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{100}{s} \left[\frac{s + 250}{15(s + 166.7)} \right] = 6.67 \left[\frac{s + 250}{s(s + 166.7)} \right]$$

وهذا التعبير متطابقاً مع (37) للمسألة 16-14 وبذلك نحصل على نفس دالة التيار i_1 .



شكل 16-15



شكل 16-14

16.17 فى الشبكة ذات الشبكتين المبينة شكل 16-15 لا توجد شحنة ابتدائية على المكثف . أوجد

تيارى الحلقة i_1 ، i_2 التانحان عند قفل المفتاح عند $t = 0$.

معادلات الدائرة فى مجال الزمن هى :

$$10i_1 + \frac{1}{0.2} \int_0^t i_1 d\tau + 10i_2 = 50 \quad 50i_2 + 10i_1 = 50$$

والمعادلات المناظرة في مجال s هي :

$$10I_1(s) + \frac{1}{0.2s} I_1(s) + 10I_2(s) = \frac{50}{s} \quad 50I_2(s) + 10I_1(s) = \frac{50}{s}$$

$$I_1(s) = \frac{5}{s + 0.625} \quad I_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 0.625} \quad \text{وبالحل}$$

والتي تحول إلى :

$$i_1 = 5e^{-0.625t} \quad (A) \quad i_2 = 1 - e^{-0.625t} \quad (A)$$

16.18 بالرجوع للمسألة 16-17 أوجد المعاوقة المكافئة في شبكة المجال s واحسب التيار الكلي وتيارات الأفرع باستعمال قاعدة تقسيم التيار .

المعاوقة في مجال s المكافئة من ناحية جهد منبع هي :

$$Z(s) = 10 + \frac{40(1/0.2s)}{40 + 1/0.2s} = \frac{80s + 50}{8s + 1} = 10 \left(\frac{s + 5/8}{s + 1/8} \right) \quad (38)$$

والدائرة المكافئة مبنية شكل 16-16 ويكون التيار الناتج :

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = 5 \frac{s + 1/8}{s(s + 5/8)} \quad (39)$$

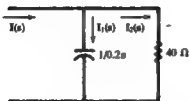
وبفك I(s) بالكسور الجزئية .

$$I(s) = \frac{1}{s} + \frac{4}{s + 5/8} \quad \text{from which} \quad i = 1 + 4e^{-5t/8} \quad (A)$$

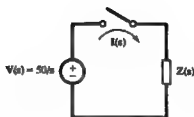
والآن يمكن الحصول على تيارات الأفرع $I_1(s)$ ، $I_2(s)$ بقاعدة تقسيم التيار . وبالرجوع لشكل 16-17 نحصل على :

$$I_1(s) = I(s) \left(\frac{40}{40 + 1/0.2s} \right) = \frac{5}{s + 5/8} \quad \text{and} \quad i_1 = 5e^{-0.625t} \quad (A)$$

$$I_2(s) = I(s) \left(\frac{1/0.2s}{40 + 1/0.2s} \right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 5/8} \quad \text{and} \quad i_2 = 1 - e^{-0.625t} \quad (A)$$

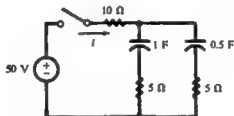


شكل 16-17



شكل 16-16

16.19 أوقف المفتاح في الشبكة شكل 16-18 عند $t = 0$ ولا توجد أي شحنات ابتدائية على المكثفين .
أوجد التيار الناتج i .



شكل 16-18

المعاوقة المكافئة للشبكة في مجال s هي :

$$Z(s) = 10 + \frac{(5 + 1/s)(5 + 1/0.5s)}{10 + 1/s + 1/0.5s} = \frac{125s^2 + 45s + 2}{s(10s + 3)}$$

وبالتالي فإن التيار :

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{50}{s} \cdot \frac{s(10s + 3)}{(125s^2 + 45s + 2)} = \frac{4(s + 0.3)}{(s + 0.308)(s + 0.052)}$$

وبفك $I(s)$ بالكسور الجزئية :

$$I(s) = \frac{1/8}{s + 0.308} + \frac{31/8}{s + 0.052} \quad \text{and} \quad i = \frac{1}{8}e^{-0.308t} + \frac{31}{8}e^{-0.052t} \quad (\text{A})$$

16.20 استخدم نظريتي القيمة الابتدائية والقيمة النهائية لتيار مجال s للمسألة 16-19 .

$$i(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sI(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{s}{s + 0.308} \right) + \frac{31}{8} \left(\frac{s}{s + 0.052} \right) \right] = 4 \text{ A}$$

$$i(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sI(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{s}{s + 0.308} \right) + \frac{31}{8} \left(\frac{s}{s + 0.052} \right) \right] = 0$$

وباختيار شكل 16-18 يبدو أن المقاومة الكلية للدائرة $R = 10 + 5(5) / 10 = 12.5 \Omega$ وبالتالي $i(0^+) = 50/12.5 = 4 \text{ A}$ وعلى ذلك في الحالة المستقرة فإن كلا المكثفان سيكونان مشحونين للجهد 50 V ويكون التيار صفراً.

مسائل إضافية

16.21 أوجد تحويل لابلاس لكل من الدوال التالية :

- (a) $f(t) = At$ (c) $f(t) = e^{-at} \sin \omega t$ (e) $f(t) = \cosh \omega t$
 (b) $f(t) = te^{-at}$ (d) $f(t) = \sinh \omega t$ (f) $f(t) = e^{-at} \sinh \omega t$

Ans. (a) - (e) See Table 16-1.

$$(f) \frac{\omega}{(s+a)^2 - \omega^2}$$

16.22 أوجد معكوس تحويل لابلاس لكل من الدوال التالية :

$$(a) F(s) = \frac{s}{(s+2)(s+1)}$$

$$(d) F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 6s + 9)}$$

$$(g) F(s) = \frac{2s}{(s^2 + 4)(s+5)}$$

$$(b) F(s) = \frac{1}{s^3 + 7s + 12}$$

$$(e) F(s) = \frac{s+5}{s^3 + 2s + 5}$$

$$(c) F(s) = \frac{5s}{s^3 + 3s + 2}$$

$$(f) F(s) = \frac{2s+4}{s^3 + 4s + 13}$$

$$\text{Ans. (a)} \quad 2e^{-2t} - e^{-t}$$

$$(d) \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} - te^{-2t}$$

$$(g) \quad \frac{1}{15} \cos 2t + \frac{4}{15} \sin 2t - \frac{1}{15}e^{-5t}$$

$$(b) \quad e^{-2t} - e^{-4t}$$

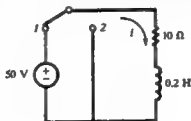
$$(e) \quad e^{-t}(\cos 2t + 2 \sin 2t)$$

$$(c) \quad 10e^{-2t} - 5e^{-t}$$

$$(f) \quad 2e^{-2t} \cos 3t$$

16.23 دائرة توالى RL بها $R = 10 \Omega$ ، $L = 0.2 \text{ H}$ ، وجهد ثابت $V = 50 \text{ V}$ وصل عند $t = 0$. أوجد التيار الناتج مستخدماً طريقة تحويل لابلاس . الجواب : $i = 5 - 5e^{-50t} \text{ (A)}$.

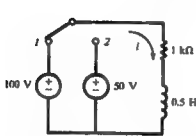
16.24 في دائرة التوالى RL لشكل 16-19 كان المفتاح عند الوضع 1 لمدة طويلة للوصول إلى الحالة المستقرة ثم انتقل إلى الوضع 2 عند $t = 0$. أوجد التيار . الجواب : $i = 5e^{-50t} \text{ (A)}$.



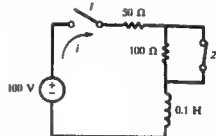
شكل 16-19

16.25 في الدائرة المبينة شكل 16-20 أقتل المفتاح 1 عند $t = 0$ ثم عند $t' = 4 \text{ ms}$ فتع المفتاح 2. أوجد التيار في الفترتين $0 < t < t'$ ، عند $t' > t$.

الجواب: (A) $i = 2(1 - e^{-500t})$ ، $i = 1.06e^{-1500(t-t')} + 0.667 \text{ (A)}$.



شكل 16-21



شكل 16-20

16.26 في دائرة التوالى RL المبينة شكل 16-21 أقتل المفتاح للوضع 1 عند $t = 0$ ثم عند $t' = t$ $50 \mu\text{s}$ إنتقل إلى الوضع 2 . أوجد التيار في الفترتين $0 < t < t'$ ، عند $t' > t$.

الجواب: (A) $i = 0.1(1 - e^{-2000t})$ ، $i = 0.06e^{-2000(t-t')} - 0.05 \text{ (A)}$.

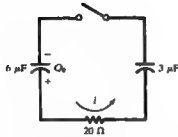
16.27 دائرة توالى RC بها $R = 10 \Omega$ ، $C = 4 \mu\text{F}$ ، $Q_0 = 800 \mu\text{C}$ على المكثف حينما كان المفتاح مقفولاً وباستخدام جهد ثابت $V = 100 \text{ V}$. أوجد التيار الناتج العابر إذا كانت الشحنة (أ) لها نفس القطبية قبل تأثير المنبع ، (ب) لها القطبية المخالفة أو الإشارة .

الجواب: $i = -10e^{-25 \times 10^3 t}$ ، $i = 30e^{-25 \times 10^3 t}$.

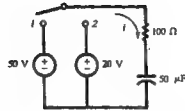
16.28 في دائرة RC ، $R = 10 \Omega$ و $C = 4 \mu\text{F}$ والمكثف له شحنة ابتدائية $Q_0 = 800 \mu\text{C}$ عند زمن فغل المفتاح ، باستخدام منبع جهد ثابت قيمته $V = 100 \text{ V}$. إذا كان التيار الناتج $i = 0.075e^{-50t}$ أوجد الشحنة Q_0 وقطبيتها . الجواب: $500 \mu\text{C}$ معاكس لقطبية المنبع .

16.29 في دائرة RC المبينة شكل 16-22 أقتل المفتاح للوضع 1 عند $t = 0$ ثم عند $t' = \tau$ (الثابت الزمني) تحرك للوضع 2 . أوجد التيار العابر للفترتين $0 < t < t'$ ، عند $t' > t$.

الجواب: (A) $i = 0.5e^{-200t}$ ، (A) $i = 0.516e^{-200(t-t')}$.



شكل 16-23

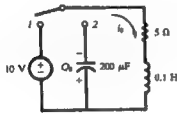


شكل 16-22

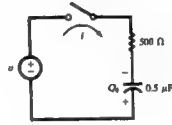
16.30. للدائرة شكل 16-23 . $Q_0 = 300 \mu C$ عند زمن قفل المفتاح . أوجد التيار الناتج العابر .
الجواب : $i = 2.5e\omega_0 - 2.5 \times 10^4 t$ (A)

16.31. في الدائرة المبينة شكل 16-24 الشحنة الابتدائية على المكثف $Q_0 = 25 \mu C$ والجهد الجيبي للمنع $v = 100 \sin(1000t + \phi)$. أوجد التيار الناتج إذا أقفل المفتاح عند الزمن $\phi = 30^\circ$.
الجواب : $i = 0.1535e^{-4000t} + 0.0484 \sin(1000t + 106^\circ)$ (A)

16.32. دائرة توالي RLC بها $R = 5 \Omega$ ، $L = 0.1 H$ ، $C = 500 \mu F$ والجهد الثابت $V = 10 V$ وصل عند $t = 0$. أوجد التيار الناتج . الجواب : $i = 0.72e^{-25t} \sin 139t$ (A)



شكل 16-25



شكل 16-24

16.33. في دائرة التوالي RLC لشكل 16-25 كانت الشحنة الابتدائية $Q_0 = 1 mC$ عندما كان المفتاح عند الوضع 1 لمدة طويلة للحصول على الحالة المستقرة . أوجد التيار العابر الناتج فيما يتحرك المفتاح للوضع 2 عند $t = 0$. الجواب : $i = e^{-25t} (2 \cos 222t - 0.45 \sin 222t)$ (A)

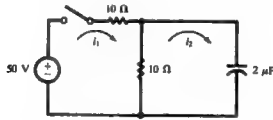
16.34. دائرة توالي RLC بها $R = 5 \Omega$ ، $L = 0.2 H$ ، $C = 1 F$ وضع جهد $v = 10e^{-100t}$ (V) وصل عند $t = 0$. أوجد التيار الناتج .

الجواب : $i = 0.666e^{-100t} + 0.670e^{-24.8t} - 0.004e^{-0.2t}$ (A)

16.3: دائرة توالى RLC بها $R = 200 \Omega$ ، $L = 0.5 \text{ H}$ ، $C = 100 \mu\text{F}$ والجهد الجيبى $v = 300 \sin(500t + \phi) \text{ (V)}$. أوجد التيار الناتج إذا أقفل المفتاح عند الزمن المناظر لقيمة $\phi = 30^\circ$.
الجواب: $i = 517e^{-341.4t} - 0.197e^{-58.6t} + 0.983 \sin(500t - 19^\circ) \text{ (A)}$.

16.36: دائرة توالى RLC بها $R = 5 \Omega$ ، $L = 0.1 \text{ H}$ ، $C = 500 \mu\text{F}$ والجهد الجيبى $v = 100 \sin(250t) \text{ (V)}$. أوجد التيار الناتج إذا أقفل المفتاح عند $t = 0$.
الجواب: $i = e^{-25t} (5.42 \cos 139t + 1.89 \sin 139t) + 5.65 \sin(250t - 73.6^\circ) \text{ (A)}$.

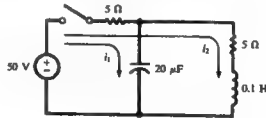
16.37: للشبكة ذات الشبكتين لشكل 16-26 اختير اتجاه التيار كما فى الشكل . أكتب معادلات فى مجال الزمن حولها إلى معادلات مجال s المناظرة وأوجد التيارين i_1 ، i_2 .
الجواب: $i_1 = 2.5 (1 + e^{-10^5 t}) \text{ (A)}$ ، $i_2 = 5e^{-10^5 t} \text{ (A)}$.



شكل 16-26

16.38: للشبكة ذات الشبكتين المبينة شكل 16-27 . أوجد التيارين i_1 ، i_2 الناتجين بعد قفل المفتاح عند $t = 0$.

الجواب: $i_1 = 0.101e^{-100t} + 9.899e^{-9950t} \text{ (A)}$ ، $i_2 = 5.05e^{-100t} + 5 + 0.05e^{-9950t} \text{ (A)}$.



شكل 16-27

16.39 في الشبكة المبينة شكل 16-28 يمرر المنبع 100 V تيار متصلا في الحلقة الأولى حينما كان المفتاح

مفتوحا . أوجد التيارات بعد قفل المفتاح عند $t = 0$.

الجواب : $i_1 = 1.67e^{-6.67t} + 5$ (A) ، $i_2 = 0.555e^{-6.67t} + 5$ (A) .

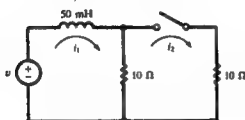
16.40 الشبكة ذات الشبكتين المبينة شكل 16-29 تحتوي على الجهد الجيني $v = 100 \sin(200t + \phi)$

(V) . أقلل المفتاح في اللحظة التي كان الجهد يزداد بأقصى معدل . أوجد تيارى الشبكة الناتج

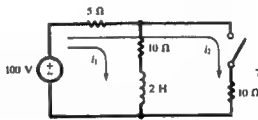
باستعمال الإتجاهات المبينة بالشكل .

الجواب : $i_1 = 3.10e^{-100t} + 8.96 \sin$ ، $i_2 = 1.505e^{-100t} + 4.48 \sin(200t - 63.4^\circ)$ (A)

(A)



شكل 16-29



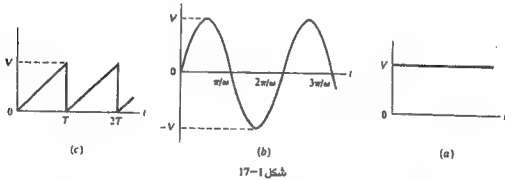
شكل 16-28

الفصل السابع عشر

طريقة فوريير لتحليل أشكال الموجات

17.1 مقدمة

في الدوائر التي درست سابقاً حصلنا على التجاوب بإثارة ثابتة القيمة أو ذات تغيير جيبي في هذه الحالات يكفي تعبير واحد لشرح الدالة في جميع الأزمنة وكمثال: $v = V \sin \omega t$ كما هو مبين شكل (a) ، (b) .



وبعض أشكال الموجات المتعاقبة مثل موجة من المنشار شكل (c) 17-1 يمكن لكل فترة تعريفها بدوال مفردة . ولذلك فإنه يمكن التعبير عن موجة من المنشار بالعلاقة $f(t) = (V/T)t$ في الفترة $0 < t < T$ والعلاقة $f(t) = (V/T)(t - T)$ في الفترة $T < t < 2T$. وبينما توصف هذه العلاقات المجزأة شكل المرحلة بصفة جيدة ولكنها لا تسمح بإيجاد تجاوب الدائرة . والآن إذا أمكن التعبير عن دالة متعاقبة كمجموع لعدد محدد أو غير محدد من الدوال الجيبية فإن تجاوبات الشبكات الخطية للإثارات الغير جيبية يمكن تحديدها باستخدام نظرية التراكب . وطريقة فوريير توفر وسيلة لحل مثل هذه المسائل .

وفى هذا الفصل تم تطوير الطرق والحالات لهذه المفكوكات ويمكن التعبير عن أشكال الموجات المتعاقبة بصورة متواليات فوريير . كما يمكن التعبير عن أشكال الموجات الغير متعاقبة بتحويلات فوريير . ومع هذا فإن أشكال الموجات الغير متعاقبة يمكن أيضاً التعبير عنها بمتواليات فوريير خلال فترة محددة والتي تكون صحيحة فى هذه الفترة . ولهذا السبب فإن تحليل متواليات فوريير هو موضوع هذا الفصل .

17.2 متواليات فوريير المثلثية

يمكن التعبير عن أى شكل موجى متعاقب أى التى فيها $f(t) = f(t + T)$ بمتواليات فوريير بشرط أن :

(1) إذا كانت مستمرة أى يوجد عدد محدد من الفصل فى الفترة T .

(2) لها قيمة متوسطة محددة خلال الفترة T .

(3) لها عدد من القيم العظمى الموجبة والسالبة فى الفترة T .

وحينما تحقق شروط ديريشلت السابقة فإنه تتواجد متواليات فوريير ويمكن كتابتها بالشكل المثلثى

التالى :

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots \\ + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (1)$$

وتحدد ثوابت فوريير a و b بالنسبة لشكل موجى معين عن طريق التكاملات . ونحصل على معاملات جيب التمام (\cos) عند إجراء التكامل بضرب كلا الطرفين للمعادلة (1) بالقيمة $\cos n\omega t$ وإجراء التكامل بالنسبة لفترة كاملة . وفترة الموجة الأساسية $2\pi/\omega$ هى فترة المتوالية نظراً لأن كل حد فى المتوالية له تردد عبارة عن التردد الأساسى مضروباً فى رقم صحيح .

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(t) \cos n\omega t \, dt = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2}a_0 \cos n\omega t \, dt + \int_0^{2\pi/\omega} a_1 \cos \omega t \cos n\omega t \, dt + \dots \\ + \int_0^{2\pi/\omega} a_n \cos^2 n\omega t \, dt + \dots + \int_0^{2\pi/\omega} b_1 \sin \omega t \cos n\omega t \, dt \\ + \int_0^{2\pi/\omega} b_2 \sin 2\omega t \cos n\omega t \, dt + \dots \quad (2)$$

التكاملات المحددة في الطرف الأيمن للمعادلة (2) جميعها صفراً فيما عدا تلك المحتوية على $\cos n\omega t$ والتي حلها القيمة $a_n (2\pi/\omega)$ وبالتالي :

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt \quad (3)$$

وبضرب (1) في $\sin n\omega t$ تم التكامل كما سبق ينتج معاملات الجيب في التكامل .

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \sin n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt \quad (4)$$

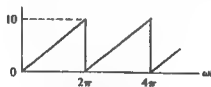
والشكل الآخر لأشكال التكامل مع المتغير $\psi = \omega t$ والفترة المناظرة 2π دائري يكون :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\psi) \cos n\psi d\psi \quad (5)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\psi) \sin n\psi d\psi \quad (6)$$

حيث $F(\psi) = f(\psi/\omega)$. ويكون حدود التكامل من $-T/2$ إلى $T/2$ ، من $-\pi$ إلى $+\pi$ أو لأى حدود أخرى يمكن أن تسهل الحسابات . ويمكن الحصول على الثابت a_0 من (3) ، (5) مع $n = 0$ ومع هذا وحيث أن $a_0 (1/2)$ هي متوسط قيمة الدالة فإنه يمكن تمثيلها من شكل الموجة بمجرد النظر . وتقتارب المتوالية تقريباً مع عواملها التي حصلنا عليها من إجراء التكاملات للدالة بانتظام عند جميع نقاط الاستمرارية وتقتارب للقيمة المتوسطة عند نقطة الإنفصال .

مثال 17.1 : أوجد متوالية فورير للشكل الموجي المبين شكل 17-2 .



شكل 17-2

الشكل الموجي متعاقب بزمّن تعاقب $2\pi/\omega$ في 2π أو ωt . هي مستمرة للقيم $0 < \omega t < 2\pi$

وتمثل بالعلاقة $f(t) = (10/2\pi)\omega t$ مع مناطق عدم استمرار عند $\omega t = n 2\pi$ حيث $n = 0, 1, 2, \dots$

وبذلك تتحقق شروط ديريشلت والقيمة المتوسطة للدالة هي 5 وبالتالي $a_0 = 5$ ولقيم $n > 0$ فإن المعادلة (5) تعطى :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{10}{2\pi} \right) \cos \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{10}{2\pi^2} \left[\frac{\omega t}{n} \sin n\omega t + \frac{1}{n^2} \cos n\omega t \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{10}{2\pi^2 n^2} (\cos n2\pi - \cos 0) = 0$$

وبذلك لا تحتوى المتتالية على حدود جيب التمام وباستخدام (6) نحصل على :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{10}{2\pi} \right) \omega t \sin n\omega t d(\omega t) = \frac{10}{2\pi^2} \left[-\frac{\omega t}{n} \cos n\omega t + \frac{1}{n^2} \sin n\omega t \right]_0^{2\pi} = -\frac{10}{\pi n}$$

وباستخدام معاملات حدود الجيب هذه والحد المتوسط تكون المتتالية :

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi} \sin \omega t - \frac{10}{2\pi} \sin 2\omega t - \frac{10}{3\pi} \sin 3\omega t - \dots = 5 - \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\omega t}{n}$$

ويمكن جمع حدود الجيب وجيب التحكم للترددات المتشابهة لحد جيب أو جيب تمام واحد مع زاوية وجه وبالتالي نحصل على أى من الشكلين التاليين للمتتالية المثلثية .

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum c_n \cos (n\omega t - \theta_n) \quad (7)$$

$$\text{and} \quad f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum c_n \sin (n\omega t + \phi_n) \quad (8)$$

حيث $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\theta_n = \tan^{-1}(b_n/a_n)$, and $\phi_n = \tan^{-1}(a_n/b_n)$. In (7) and (8),

فإن C_n هي القيمة التوافقية والزائتان هما ϕ_n ، θ_n .

17.3 متواليات فوريير الأسية

يمكن كتابة الشكل الموجى المتعاقب $f(t)$ والتي تحقق شروط ديريشلت كمتوالية فوريير الأسية والتي تعتبر التغير فى المتواليات المثلثية . والمتوالية الأسية هي :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\omega t} \quad (9)$$

وللحصول على ناتج التكامل للمعاملات A_n نضرب المعادلة (9) في كلا الطرفين في $e^{-jn\omega t}$ ثم نكامل بالنسبة للفترة كلها .

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-jn\omega t} d(\omega t) = & \dots + \int_0^{2\pi} A_{-2}e^{-j2\omega t}e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^{2\pi} A_{-1}e^{-j\omega t}e^{-jn\omega t} d(\omega t) \\ & + \int_0^{2\pi} A_0e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^{2\pi} A_1e^{j\omega t}e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \dots \\ & + \int_0^{2\pi} A_ne^{jn\omega t}e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

وتكون التكاملات المحدودة في الطرف الأيمن للمعادلة (10) كلها أصفاراً فيما عدا $\int_0^{2\pi} A_n d(\omega t)$ والتي يكون لها القيمة $2\pi A_n$ وبالتالي :

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-jn\omega t} d(\omega t) \quad \text{or} \quad A_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-j2\pi n t/T} dt \quad (11)$$

وبالمثل كما مع إجراء تكاملات a_n ، b_n فإن حدود التكامل في (11) يمكن أن تكون فقط النهاية لأى فترة كاملة مناسبة وليس بالضرورى أن تكون من 0 إلى 2π أو من 0 إلى T . لاحظ أنه عندما $f(t)$ تكون حقيقية فإن $A_{-n} = A_n^*$ وبذلك فإننا نحتاج فقط للقيم الموجبة لقيم n بالنسبة للمعادلة (11) وبالإضافة إلى ذلك فلدينا :

$$a_n = 2 \operatorname{Re} A_n \quad b_n = -2 \operatorname{Im} A_n \quad (12)$$

مثال 17.2 : أوجد المتوالية الأسية (9) من المتوالية المثلثية (1).

استبدل حدود الجيب وجيب التمام في (1) بمكافئاتها الأسية المركبة .

$$\sin n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \quad \cos n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}$$

رتب الحدود الأسية تصاعدياً بالنسبة لرتبة n من $-\infty$ إلى $+\infty$. وبذلك نحصل على المجموع اللانهائى في (9) حيث $A_0 = a_0/2$ وأيضاً :

$$A_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad A_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

مثال 17.3 : أوجد متوالية فوريير للأسية للشكل الموجى المبين شكل 17-2 وباستخدام معاملات هذه المتوالية الأسية أوجد a_n ، b_n للمتوالية المثلثية وقارن مع مثال 17-1 .

في الفترة $0 < \omega t < 2\pi$ تعطى الدالة بالعلاقة $f(t) = (10/2\pi)\omega t$. وبالبحث فإن القيمة المتوسطة للدالة $A_0 = 5$ وبالتعويض $f(t)$ في (11) نحصل على معاملات A_n .

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{10}{2\pi} \right) \omega t e^{-j n \omega t} d(\omega t) = \frac{10}{(2\pi)^2} \left[\frac{e^{-j n \omega t}}{(-j n)^2} (-j n \omega t - 1) \right]_0^{2\pi} = j \frac{10}{2\pi n}$$

ويوضح معاملات A_n في (12) يمكن الشكل الأمي لتواليات فورير للشكل الموجي المعطى .

$$f(t) = \dots - j \frac{10}{4\pi} e^{-j 2\omega t} - j \frac{10}{2\pi} e^{-j \omega t} + 5 + j \frac{10}{2\pi} e^{j \omega t} + j \frac{10}{4\pi} e^{j 2\omega t} + \dots \quad (13)$$

معاملات المتوالية المثلثية هي من (12) .

$$a_n = 0 \quad b_n = -\frac{10}{\pi n}$$

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi} \sin \omega t - \frac{10}{2\pi} \sin 2\omega t - \frac{10}{3\pi} \sin 3\omega t - \dots \quad \text{وبذلك}$$

وهي تماثل لما في مثال 17-1 .

17.4 أشكال الموجات المتماثلة

تحتوي المتواليات التي حصلنا عليها في مثال 17-1 فقط على حدود جيبيية بالإضافة إلى حد ثابت . وتشتمل موجات أخرى على حدود جيب تمام وفي بعض الأحيان لا توجد سوى التوافقيات الطردية المتوالية وذلك فيما إذا كانت المتوالية تحتوى على الجيب أو جيب التمام أو كلاهما . وهذا هو الناتج بالنسبة لبعض الموجات المتماثلة تحديداً . ومعرفة نتائج التماثل يؤدي إلى تقليل الحسابات لتحديد متواليات فورير . ولهذا السبب فإن التعريفات التالية مهمة :

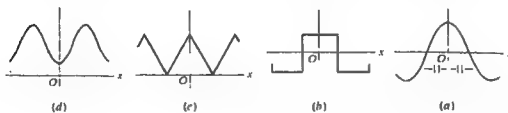
1 . الدالة $f(t)$ يقال عنها زوجية إذا كان $f(x) = f(x)$.

والدالة $f(t) = 2 + x^2 + x^4$ هي مثال للدوال الزوجية حيث أن قيمتها بالنسبة للقيمة x و $-x$ متساويان وجيب التمام هي دالة زوجية حيث أننا يمكن التعبير عنها بتعبير أسي .

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

مجموع أو حاصل ضرب دالتين زوجيتين أو أكثر هو دالة زوجية بإضافة مقدار ثابت فإن الطبيعة الزوجية للدالة لا تزال موجودة .

شكل 17-3 يوضح أشكال موجات لدوال زوجية في x . وتكون متماثلة بالنسبة للمحور الرأسى كما هو مبين فى شكل 17-3(a) .



شكل 17-3

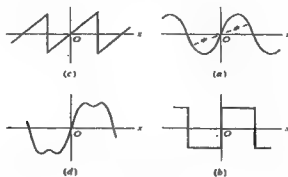
2. يقال للدالة $f(x)$ أنها فردية إذا كان $f(x) = -f(-x)$.

والدالة $f(x) = x + x^3 + x^5$ هي مثال للدوال الفردية حيث أن قيمتها بالنسبة لقيم x ولقيم $-x$ لهما إشارة مخالفة والجيب هي دالة فردية حيث أنه يمكن تمثيلها بالمتغير الأسى التالى :

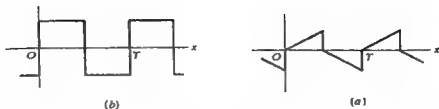
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

مجموع دالتين فرديتين أو أكثر هي دالة فردية ولكن إضافة الثابت يحو الطبيعة الفردية للدالة وضرب دالتين فرديتين هي دالة زوجية .

وأشكال الموجات المبينة شكل 17-4 تمثل دوال فردية للمتغير x وهي متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل كما هو مبين فى شكل 17-4(a) .



شكل 17-4



شكل 17-5

3. الدالة الدورية $f(x)$ يقال أن لها تماثل نصف موجى إذا كان $f(x) = -f(x + T/2)$ حيث T هي فترة تعاقب . وشكل 17-5 يبين شكلين لموجتي لهما تماثل نصف موجى .

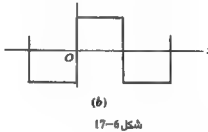
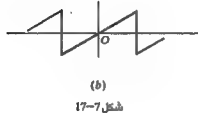
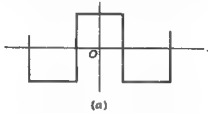
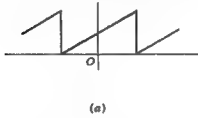
حينما يحدد نوع التماثل بالنسبة لشكل الموجة فإننا نصل إلى الاستنتاجات التالية . فإذا كان شكل الموجة زوجى فإن جميع حدود متوالية فورير تكون حدود جيب تمام مشتملة على المقدار الثابت إذا كانت القيمة المتوسطة للشكل الموجى ليس صفراً . وبالتالي فلا داعى لإجراء التكامل لمعاملات b_n حيث أنه لا توجد حدود للجيب . وإذا كان الشكل الموجى فردياً فإن المتوالية تحتوى فقط على حدود جيبية . ويمكن أن تكون الموجة فردية فقط بعد طرح قيمتها المتوسطة وفى هذه الحالة سيحتوى تمثيل فورير لها على هذا الثابت ومجموعة من حدود الجيب . وإذا احتوى الشكل الجيبى على تماثل نصف موجى فستتواجد فقط التوافقيات الفردية . وستحتوى المتوالية على كل من حدود الجيب وجيب التمام إلا إذا كانت الدالة فردية أو زوجية . وسيكون فى أى حالة a_n ، b_n مساوية للصفر لقيم $n = 2, 4, 6, \dots$ لاى شكل موجى له تماثل نصف موجى والتماثل نصف الموجى أيضاً من الممكن أن يكون موجوداً فقط بعد طرح القيمة المتوسطة .

وبعض الموجات يمكن أن تكون أشكال فردية أو زوجية وذلك يعتمد على وضع المحور الرأسى . والموجة المربعة لشكل 17-6(a) تبين حالة دالة زوجية أى أن $f(x) = f(-x)$ وبإزاحة المحور الرأسى إلى الوضع المبين فى شكل 17-6(b) يجعل الدالة فردية $f(x) = -f(-x)$.

وبوضع المحور الرأسى عند أى نقطة خلاف تلك المبينة فى شكل 17-6 فإن الموجة المربعة لن تكون زوجية أو فردية وبالتالي فإن متوالياتها تشمل كلا حدود الجيب وجيب التمام وبالتالي فإنه عند تحليل الدوال المتعاقبة فإن المحور الرأسى يجب أن يُختار لينتج إما دالة فردية أو زوجية وذلك لذا كان شكل الموجة يسمح بذلك .

وإزاحة المحور الأفقى يمكن أن يبسط تمثيل متوالية الدالة . كمثال فإن شكل الموجة فى شكل 17-7(ب) لا يحقق متطلبات الدالة الفردية حتى نلاشى القيمة المتوسطة كما هو مبين شكل 17-7(ب) وبالتالي فإن متوالياتها مستحوى على حد ثابت والحدود الجيبية فقط .

واعتبارات التشابه السابقة يمكن أن تستخدم للتحقق من معاملات متواليات فوريير الأسية . ويحتوى شكل الموجة الزوجى فقط على حدود جيب التمام فى شكل المتوالية المثلثية وبالتالي فإن معاملات فوريير الأسية يجب أن تكون أرقام حقيقية خالصة وبالمثل فإن الدالة الفردية التى تحتوى متوالياتها المثلثية على حدود الجيب فيكون لها معاملات تخيلية خالصة فى متوالياتها الأسية .



شكل 17-7

شكل 17-6

17.5 الطيف الخطى

الرسم الذى يبين كلا من قيم التوافقيات فى الموجة يسمى الطيف الخطى . وتتناقص الخطوط بسرعة للموجات التى تتقارب متوالياتها بسرعة . الموجات المحتوية على عدم الاستمرارية مثل موجة سن المنشار والموجة المربعة لها شكل طيفى بقيم متناقصة بطيئة حيث أن متوالياتها بها توافقيات قوية . فالتوافقية العاشرة ستكون غالباً ذات قيم ظاهرة وذلك بالمقارنة بالنسبة للموجة الأساسية . وفى المقابل فإن أشكال الموجات التى لا تحتوى على عدم استمرارية وتكون فى الغالب ذات مظهر قليل

التغيرات المفاجئة سيتقارب بسرعة وتحتاج لعدد قليل من الحدود فقط لإنشاء الموجة . وهذا التقارب السريع سيبدو من شكل خط الطيف حيث تتناقص قيم التوافقيات بسرعة للدرجة أنه بعد الخامس أو السادس فإنها تكون تقريباً غير ظاهرة .

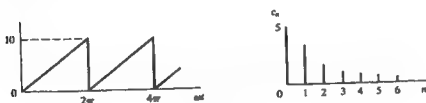
ومحتوى التوافقيات وخط الطيف هي جزء خامل من طبيعة الموجة نفسها ولا تتغير مطلقاً بغض النظر عن طريق التحليل . وإزاحة نقطة الأصل يعطى المتوالية المثلثية شكلاً مختلفاً تماماً وتتغير أيضاً بصورة كبيرة معاملات المتوالية الأسية . ومع هذا فإن نفس التوافقيات تظهر دائماً في المتوالية وكذلك قيمها .

$$c_0 = |\frac{1}{2}a_0| \quad \text{and} \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (n \geq 1) \quad (14)$$

$$\text{or} \quad c_0 = |A_0| \quad \text{and} \quad c_n = |A_n| + |A_{-n}| = 2|A_n| \quad (n \geq 1) \quad (15)$$

وهذه المعاملات تبقى كما هي . لاحظ أنه عند استخدام الشكل الأسى فإن قيمة التوافقية النونية (nth) تشمل مساهمات الترددات $-n\omega$ ، $+n\omega$.

مثال 17.4 : في شكل 17-8 ميين شكل موجة سن المنشار لمثال 17-1 والقيم الخطية لها وحيث أنه يوجد فقط الحدود الجيبية في المتوالية المثلثية فإنه يمكن بيان قيم التوافقيات مباشرة بالقيم $|b_n|$ ، $1/2a_0$ ونحصل على نفس الطيف الخطى من متواليات فوريير الأسية (13) .



شكل 17-8

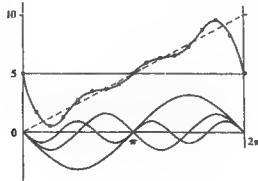
17.6 تركيبات اشكال الموجات

التركيبات هي مجموعة من الأجزاء يتكون منها الشكل الكلى . وتحليل فوريير هي إعادة تجميع لحدود المتوالية المثلثية غالباً للأربعة أو الخمسة الأولى للحصول على الموجة الأصلية . وغالباً ما يكون بعد تركيب الموجة يقتنع الطالب أن متوالية فوريير تمثل فى الحقيقة الموجة المتعاقبة التى أخذت منها .

وتكون المتوالية المثلثية لموجة سن المنشار لشكل 17-8 هي :

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi} \sin \omega t - \frac{10}{2\pi} \sin 2\omega t - \frac{10}{3\pi} \sin 3\omega t - \dots$$

وهذه الحدود الأربعة رسمت وجمعت فى شكل 17-9 . ولو أن النتيجة ليست موجة سن المنشار تماماً فإنها يبدو مع استخدام حدود أكثر فى الرسم سيكون أكثر اقتراباً من شكل سن المنشار . وحيث أن هذه الموجة بها عدم استمرارية فإن تقاربها لن يكون سريعاً وبالتالي فإن التركيب باستخدام أربع حدود فقط لا ينتج عنه نتيجة جيدة والحد التالى عند التردد 400 له القيمة $10/\pi$ والتى تكون ذات قيمة ملحوظة بمقارنتها بالقيمة الأساسية $10/\pi$ وكلما أضيف حد إلى التركيب فإن عدم انتظام الناتج سيقبل . والشكل التقريبى بالنسبة للموجة الأصلية سيتحسن وهذا ما عنيناه سابقاً من أن المتوالية تتقارب لقيمة الدالة فى جميع نقطها ذات الاستمرارية وتؤول إلى القيمة المتوسطة عند نقطة عدم الاستمرارية ومن الواضح فى شكل 17-9 عند 2π ، أن القيمة 5 ستبقى حيث أن جميع حدود الجيب صفراً عند هذه النقطة وهذه هي نقط عدم الاستمرارية وقيمة الدالة حينما تقترب منها من اليسار هي 10 ومن اليمين 0 بقيمة متوسطة 5 .



شكل 17-9

17.7 القيم الفعالة والقدرة

القيم الفعالة (rms) للدالة :

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots$$

$$(16) \quad F_{rms} = \sqrt{(\frac{1}{2}a_0)^2 + \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}a_2^2 + \dots + \frac{1}{2}b_1^2 + \frac{1}{2}b_2^2 + \dots} = \sqrt{c_0^2 + \frac{1}{2}c_1^2 + \frac{1}{2}c_2^2 + \frac{1}{2}c_3^2 + \dots} \quad \text{هى}$$

حيث استخدمنا المعادلة (14) .

باعتبار شبكة خطية ذات جهد متعاقب فإننا نستوقع أن التيار الناتج سيشمل نفس حدود التوافقيات مثل الجهد ولكن بقيم مختلفة حيث أن المعاوقة تختلف مع ω . ومن الممكن اختفاء بعض التوافقيات في التيار فمثلاً في دائرة التوازي LC الخالصة فإنه من الجائز أن تتطابق أحد ترددات التوافقيات مع تردد الرنين مما يجعل المعاوقة عند هذا التردد ما لا نهاية وعموماً فإنه يمكن كتابة التالي :

$$v = V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \phi_n) \quad \text{and} \quad i = I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n) \quad (17)$$

مع القيم الفعالة المناظرة التالية :

$$V_{rms} = \sqrt{V_0^2 + \frac{1}{2}V_1^2 + \frac{1}{2}V_2^2 + \dots} \quad \text{and} \quad I_{rms} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}I_1^2 + \frac{1}{2}I_2^2 + \dots} \quad (18)$$

ونحصل على القدرة المتوسطة P من تكامل القدرة اللحظية والتي نحصل عليها من حاصل

ضرب i ، v .

$$p = vi = [V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \phi_n)][I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n)] \quad (19)$$

وحيث أن كلا v ، i لهما فترة التعاقب T فإن حاصل ضربهما سيحتوى على عدد دورات T.

(لاحظ أنه الموجة واحدة جيبيية للجهد فإن حاصل الضرب i لا له فترة تعاقب تساوى نصف فترة تعاقب الجهد) ويمكن حساب القيمة المتوسطة بالنسبة لفترة واحدة للجهد التالي :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T [V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \phi_n)][I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n)] dt \quad (20)$$

وباختبار الحدود الممكنة فى ضرب المتواليتين اللانهائيتين يكون طبقاً للأنواع التالية : ضرب

ثابتان ، ضرب مقدار ثابت ودالة جيبيية ، ضرب دالتين جيبييتين ذات ترددتين مختلفين ، وتربيع دالة

جيبية . وبعد التكامل فإن ضرب الثابتين لا يزال هو $V_0 I_0$ ومربع الدالة الجيبية مع حدودها تبدو كالآتي: $(\phi_n - \psi_n) V_0 I_0 / 2 \cos$ وجميع حواصل الضرب الأخرى بعد التكامل للفترة التعاقبية T تكون صفراً وبالتالي فإن متوسط القدرة هو:

$$P = V_0 I_0 + \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} V_2 I_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} V_3 I_3 \cos \theta_3 + \dots \quad (21)$$

حيث $\theta_n = \phi_n - \psi_n$ هى زاوية المعاوقة للشبكة عند تردد الزاوية $n\omega$ ، V_n ، I_n القيمة العظمى للدوال الجيبية .

وفى الحالة الخاصة للجهد الجيبى ذو التردد الواحد فإن $V_0 = V_2 = V_3 = \dots = 0$ والمعادلة (21) تؤول إلى الشكل المعروف .

$$P = \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos \theta_1 = V_{eff} I_{eff} \cos \theta$$

قارن بند 2-10 وأيضاً لجهد التيار المستمر $V_1 = V_2 = V_3 = \dots = 0$ والمعادلة (21) تصبح:

$$P = V_0 I_0 = VI$$

وبذلك فإن المعادلة (21) هى معادلة عامة تماماً ولا حظ أنه من ناحية الطرف الأيمن لا توجد حدود تحتوى على جهد و تيار بترددين مختلفين وبالرجوع للقدرة فإن كل توافقية تعمل بصفة مطلقة وبالتالي:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots$$

17.8 تطبيقات فى تحليل الدائرة

لقد تم سابقاً اقتراح أننا يمكن استخدام حدود متوالية الجهد للشبكة الخطية للحصول على حدود التوافقية لمتوالية التيار . وحصلنا عليها بطريقة التراكم . وبالتالي فإننا نعتبر أن كل حد من متوالية فورير والناتى تمثل الجهد كمنبع مستقل كما هو مبين شكل 10-17 . والآن نستخدم المعاوقة المكافئة للشبكة عند كل تردد توافقى $n\omega$ لحساب التيار عند ذلك التوافقى ومجموع هذه التجاويزات منفردة هو التجاوب الكلى i على شكل متوالية للجهد المستخدم .

مثال 17.5 : دائرة توالي RL بها $R = 5 \Omega$ ، $L = 20 \text{ mH}$ (شكل 17-11) استخدم الجهد $v = 100 + 50 \sin \omega t + 25 \sin 3\omega t \text{ (V)}$ أوجد التيار والقدرة المتوسطة .

أحسب المعاوقة المكافئة للدائرة عند كل تردد يوجد في دالة الجهد ثم أوجد التيارات المناظرة .

$$\text{At } \omega = 0, Z_0 = R = 5 \Omega \text{ and}$$

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{100}{5} = 20 \text{ A}$$

$$\text{At } \omega = 500 \text{ rad/s, } Z_1 = 5 + j(500)(20 \times 10^{-3}) = 5 + j10 = 11.15 \angle 63.4^\circ \Omega \text{ and}$$

$$i_1 = \frac{V_{1,\max}}{Z_1} \sin(\omega t - \theta_1) = \frac{50}{11.15} \sin(\omega t - 63.4^\circ) = 4.48 \sin(\omega t - 63.4^\circ) \text{ (A)}$$

$$\text{At } 3\omega = 1500 \text{ rad/s, } Z_2 = 5 + j30 = 30.4 \angle 80.54^\circ \Omega \text{ and}$$

$$i_2 = \frac{V_{2,\max}}{Z_2} \sin(3\omega t - \theta_2) = \frac{25}{30.4} \sin(3\omega t - 80.54^\circ) = 0.823 \sin(3\omega t - 80.54^\circ) \text{ (A)}$$

مجموع التيارات التوافقية هو التجاوب الكلى المطلوب وهو متوالية فورير من النوع (8).

$$i = 20 + 4.48 \sin(\omega t - 63.4^\circ) + 0.823 \sin(3\omega t - 80.54^\circ) \text{ (A)}$$

القيمة الفعالة للتيار .

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{20^2 + (4.48^2/2) + (0.823^2/2)} = \sqrt{410.6} = 20.25 \text{ A}$$

والتي يتج عنها القدرة في المقاومة 5Ω هي :

$$P = I_{\text{eff}}^2 R = (20.25)^2 5 = 2053 \text{ W}$$

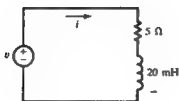
ولتأكد من النتائج نحسب القدرة الكلية المتوسطة وذلك بحساب القدرة عند كل مساهمة لأى من التوافقات ثم جمع النتائج .

$$\text{At } \omega = 0: P_0 = V_0 I_0 = 100(20) = 2000 \text{ W}$$

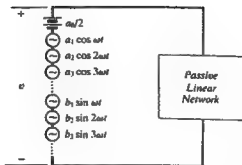
$$\text{At } \omega = 500 \text{ rad/s: } P_1 = \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos \theta_1 = \frac{1}{2} (50)(4.48) \cos 63.4^\circ = 50.1 \text{ W}$$

$$\text{At } 3\omega = 1500 \text{ rad/s: } P_2 = \frac{1}{2} V_2 I_2 \cos \theta_2 = \frac{1}{2} (25)(0.823) \cos 80.54^\circ = 1.69 \text{ W}$$

$$\text{Then, } P = 2000 + 50.1 + 1.69 = 2052 \text{ W}$$



شكل 17-11



شكل 17-10

طريقة أخرى :

مفكوك متوالية فوريير للجهد على طرفي المقاومة هو :

$$v_R = Ri = 100 + 22.4 \sin(\omega t - 63.4^\circ) + 4.11 \sin(3\omega t - 80.54^\circ) \quad (V)$$

$$V_{R_{eff}} = \sqrt{100^2 + \frac{1}{2}(22.4)^2 + \frac{1}{2}(4.11)^2} = \sqrt{10259} = 101.3 \text{ V}$$

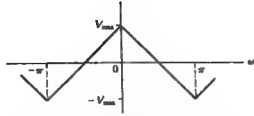
وبالتالى فإن القدرة المعطاه بالمنبع هي $P = V_{R_{eff}}^2/R = (10259)/5 = 2052 \text{ W}$

فى مثال 17-5 أعطى الجهد المؤثر كمتوالية فوريير المثالية فى t وكانت الحسابات فى مجال الزمن (استخدمت المعاوقة المركبة فقط للاختصار Z_n ، θ_n يمكن الحصول عليها مباشرة من R ، L ، $n\omega$) وإذا مثل الجهد بدلا من ذلك بمتوالية فوريير الأسية فإن :

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n e^{jn\omega t}$$

وبذلك يجب أن تتعامل مع المتجهات V_n بطريقة التراكب (الدوران عكس عقارب الساعة إذا كان $n > 0$ ومع عقارب الساعة إذا كان $n < 0$) وهذا يتطلب طرق مجال التردد. وهذا مبين فى مثال 17-6.

مثال 17.6 : إذا مثل الجهد بموجة مثلثية كما هو مبين فى شكل 17-12 ووصل إلى مكثف خالص C . أحسب التيار الناتج.



شكل 12-17

في الفترة $0 < \omega t < \pi$ كانت دالة الجهد $v = V_{\max} + (2V_{\max}/\pi)\omega t$ ، وعند $0 < \omega t < \pi$ كان الجهد $v = V_{\max} - (2V_{\max}/\pi)\omega t$. وبالتالي فإن معاملات المتوالية الأسية يمكن إيجادها بإجراء التكامل

$$V_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [V_{\max} + (2V_{\max}/\pi)\omega t] e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} [V_{\max} - (2V_{\max}/\pi)\omega t] e^{-jn\omega t} d(\omega t)$$

والتي منها $V_n = 4V_{\max}/\pi^2 n^2$ لقيم n الفردية ، $V_n = 0$ لقيم n الزوجية .

ويكون متجه التيار الناتج من V_n (n فردية) هو :

$$I_n = \frac{V_n}{Z_n} = \frac{4V_{\max}/\pi^2 n^2}{1/jn\omega C} = j \frac{4V_{\max}\omega C}{\pi^2 n}$$

وبالمفهوم الضمني لمعامل الزمن $e^{jn\omega t}$ فإن التيار الناتج التالي :

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n e^{jn\omega t} = j \frac{4V_{\max}\omega C}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jn\omega t}}{n}$$

حيث علامة التجميع هي بالنسبة لقيم n الفردية فقط .

ويمكن تحويل المتوالية للشكل المثلثي ثم تركيبها لبيان شكل موجة التيار . ومع هذا فإن المتوالية لها نفس الشكل كنتاج مسألة 17-8 حيث المعاملات هي $A_n = -j(2V/n\pi)$ لقيم n الفردية فقط والإشارة السالبة هنا لبيان أن موجة التيار هي سالب الموجة المربعة للمسألة 17-8 وقيمته العظمى $2V_{\max}\omega C/\pi$.

17.9 تحويلات فوريير لأشكال الموجات الغير متعاقبة

الشكل الموجى الغير متعاقب $x(t)$ يقال أنها تحقق شروط ديريشلت إذا كان :

$$(أ) \quad x(t) \text{ قابلة للتكامل تماماً } \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty .$$

(ب) عدد القيم العظمى والقيم الصغرى وعدد نقاط عدم الاستمرارية للموجة $x(t)$ هو قيمة محددة لكل فترة محددة .

نستطيع تعريف تحويل فوريير $x(t)$ لمثل هذا النوع من الموجات بالتالى :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (22a)$$

حيث f هو التردد . والتكامل السابق يسمى تكامل فوريير . ودالة الزمن $x(t)$ تسمى معكوس تحويل فوريير $X(f)$ ويمكن الحصول عليها بالتالى :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (22b) .$$

$x(t)$ ، $X(f)$ تكونان زوج تحويل فوريير . وبدلاً من f فإنه يمكن استخدام أيضاً السرعة الزاوية $\omega = 2\pi f$ والناتج عنها تصبح (22a) ، (22b) هما على التوالى :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (23a)$$

and

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (23b)$$

مثال 17.7 أوجد تحويل فوريير للدالة $x(t) = e^{-at}u(t)$ حيث $a > 0$ وارسم $X(f)$ لقيم $-\infty < f < +\infty$.

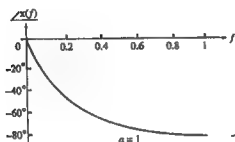
من (22a) تحويل فوريير للدالة $x(t)$ هى :

$$X(f) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (24)$$

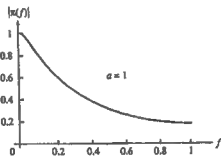
$X(f)$ هي دالة مركبة ذات متغير حقيقي قيمتها زاوية وجهها هما $|X(f)|$ ، $\angle X(f)$ على التوالي مبنية في شكل 17-13(a) ، 17-13(b) كالآتي :

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \quad (25a)$$

and $\angle X(f) = -\tan^{-1} (2\pi f/a) \quad (25b)$



(b)



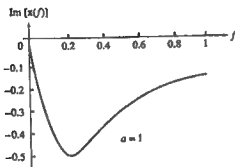
(a)

شكل 17-13

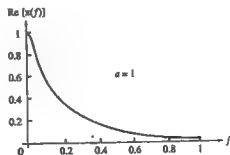
ومن جهة أخرى يمكن بيان $X(f)$ بأجزائها الحقيقية والتخيلية $\text{Re}[X(f)]$ ، $\text{Im}[X(f)]$ كما في شكل 17-14(a) ، 17-14(b) .

$$\text{Re}[X(f)] = \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (26a)$$

$$\text{Im}[X(f)] = \frac{-2\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (26b)$$



(b)



(a)

شكل 17-14

مثال 17.8 : أوجد تحويل فوريير للنمضة المربعة.

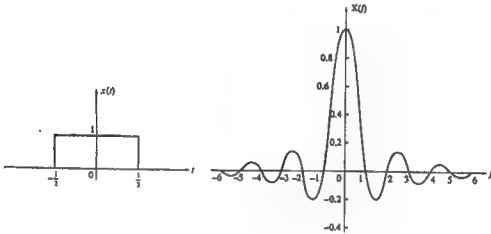
$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } -T < t < T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

من (22a)

$$X(f) = \int_{-T}^T e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{-j2\pi f} \left[e^{j2\pi fT} \right]_{-T}^T = \frac{\sin 2\pi fT}{\pi f} \quad (27)$$

ولأن $x(t)$ زوجية فإن $X(f)$ حقيقية. ورسمت أزواج التحويل في شكل (a) 17-15 و (b) للقيمة

$$T = (1/2)s$$



شكل 17-15

مثال 17.9 : أوجد تحويل فوريير للدالة $x(t) = e^{at}u(-t)$ حيث $a > 0$.

$$X(f) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a - j2\pi f} \quad (28)$$

مثال 17.10 : أوجد معكوس تحويل فوريير للدالة $X(f) = 2a / (a^2 + 4\pi^2 f^2)$ حيث $a > 0$.

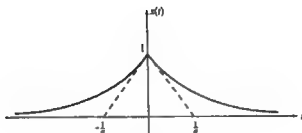
من مفكوك الكسور الجزئية نحصل على:

$$X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} + \frac{1}{a - j2\pi f} \quad (29)$$

نحصل على معكوس كل حد في (29) باستخدام (24)، (28) حيث أن:

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) = e^{-a|t|} \quad \text{for all } t$$

انظر شكل 17-16.



شكل 17-16

17.10 خواص تحويل فوريير

بعض الخواص لتحويل فوريير مبينة في جدول 17-1 والعديد من أزواج التحويلات الشائعة الاستخدام مبينة في جدول 17-2.

جدول 17-1

خواص تحويلات فوريير

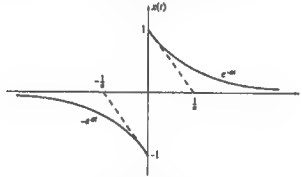
	Time Domain $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} dt$	Frequency Domain $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$
1.	$x(t)$ real	$X(f) = X^*(-f)$
2.	$x(t)$ even, $x(t) = x(-t)$	$X(f) = X(-f)$
3.	$x(t)$ odd, $x(t) = -x(-t)$	$X(f) = -X(-f)$
4.	$X(f)$	$x(-t)$
5.	$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$	$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$
6.	$y(t) = x(at)$	$Y(f) = \frac{1}{ a } X(f/a)$
7.	$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$	$Y(f) = -j2\pi f X(f)$
8.	$y(t) = x(-t)$	$Y(f) = X(-f)$
9.	$y(t) = x(t - t_0)$	$Y(f) = e^{-j2\pi ft_0} X(f)$

17.11 الطيف المتصل

$|X(f)|^2$ كما عرفت في بند 9-17 بكثافة الطاقة أو الطيف بشكل للموجة $x(t)$. ويخلاف الدوال الدورية فإن محتوى الطاقة للموجة $x(t)$ الغير دورية عند كل تردد يكون صفر ومع هذا فإن محتوى الطاقة خلال حزمة تردد به من f_1 إلى f_2 هي :

$$W = 2 \int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2 df \quad (30)$$

مثال 17.11 : أوجد الطيف للدالة $x(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$ ، $a > 0$. المبينة شكل 17-17 .



شكل 17-17

لدينا $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ وحيث أن $x_1(t) = e^{-at}u(t)$ ، $x_2(t) = e^{at}u(-t)$ فإن :


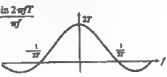
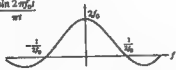

$$X_1(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad X_2(f) = \frac{1}{a - j2\pi f}$$

Then

$$X(f) = X_1(f) - X_2(f) = \frac{-j4\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

جدول 17-2

أزواج تحويل فورييه

	$x(t)$	$X(f)$
1.	$e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
2.	$e^{-at} t , a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
3.	$te^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$
4.	$\exp(-\pi t^2 / \tau^2)$	$\tau \exp(-\pi f^2 \tau^2)$
5.		
6.		
7.	1	$\delta(f)$
8.	$\delta(t)$	1
9.	$\sin 2\pi f_0 t$	$\frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j}$
10.	$\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$

from which

$$|X(f)|^2 = \frac{16\pi^2 f^2}{(a^2 + 4\pi^2 f^2)^2}$$

مثال 17.12 : أوجد وقارن محتويات الطاقة W_2 ، W_1 للدالة $y_1(t) = e^{-at}u(t)$ ،

حيث $a > 0$ في خلال الفترة من 0 إلى 1 Hz ضع $a = 200$.

من المثالين 17-10 ، 17-11 .

$$|Y_1(f)|^2 = \frac{4a^2}{(a^2 + 4\pi^2 f^2)^2}$$

and

$$|Y_2(f)|^2 = \frac{16\pi^2 f^2}{(a^2 + 4\pi^2 f^2)^2}$$

خلال $0 < f < 1 \text{ Hz}$ يمكن تقريب الطيف والطاقة بالتالي :

$$|Y_1(f)|^2 \approx 4/a^2 = 10^{-4} \text{ J/Hz} \quad \text{and} \quad W_1 = 2(10^{-4}) \text{ J} = 200 \mu\text{J}$$

$$|Y_2(f)|^2 \approx 10^{-7} f^2 \quad \text{and} \quad W_2 \approx 0$$

تتفق النتائج السابقة بالملاحظة أن معظم الطاقات في الدالة $y_1(t)$ هي قريبة من مجال التردد المنخفض وعلى العكس لقيم $y_2(t)$.

مسائل محلولة

17.1 أوجد متوالية فوريير المثلثية للموجة الميئة شكل 17-18 وارسم خطوط الطيف .

في الفترة $0 < \omega t < \pi$ ، $f(t) = V$ ، وللفترة $\pi < \omega t < 2\pi$ ، $f(t) = -V$. القيمة المتوسطة للموجة صفراً وبالتالي $a_0/2 = 0$. ونحصل على معاملات جيب التمام بإجراء التكامل وذلك بوضع الدوال كالتالي :

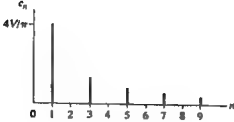
$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} V \cos n\omega t \, d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} (-V) \cos n\omega t \, d(\omega t) \right] = \frac{V}{\pi} \left\{ \left[\frac{1}{n} \sin n\omega t \right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{n} \sin n\omega t \right]_{\pi}^{2\pi} \right\}$$

$= 0 \quad \text{for all } n$

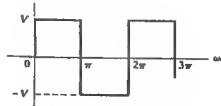
وبالتالي فإن المتوالية لا تحتوى على حدود جيب التمام وبإجراء التكامل بالنسبة لحدود

الجيب فإن :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} V \sin n\omega t \, d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} (-V) \sin n\omega t \, d(\omega t) \right] \\ &= \frac{V}{\pi} \left\{ \left[-\frac{1}{n} \cos n\omega t \right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{n} \cos n\omega t \right]_{\pi}^{2\pi} \right\} \\ &= \frac{V}{\pi n} (-\cos n\pi + \cos 0 + \cos n2\pi - \cos n\pi) = \frac{2V}{\pi n} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$



شكل 17-19



شكل 17-18

وبالتالى $b_n = 4V/\pi n$ لقيم $n = 1, 3, 5, \dots$ ، $b_n = 0$ لقيم $n = 2, 4, 6, \dots$ وتكون المتوالية للموجة المربعة .

$$f(t) = \frac{4V}{\pi} \sin \omega t + \frac{4V}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4V}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots$$

والخطوط الطيفية لهذه المتوالية مبينة شكل 17-19 وتحتوى هذه المتوالية على حدود التوافقيات الفردية فقط كما كان متوقفاً من تشابه شكل الموجة . وحيث أن موجة شكل 17-18 فردية فإن متوالياتها تحتوى فقط على حدود الجيب وحيث أنها تشمل تماثل نصف موجى فإنه يوجد فقط التوافقيات الفردية .

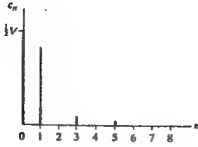
17.2 أوجد متوالية فوريير للمثلثية للشكل الموجى المثلثى المبين فى شكل 17-20 وارسم خطوط الطيف .
الدالة زوجية $f(t) = f(-t)$ وإذا طرحت قيمتها المتوسطة $V/2$ فإنها أيضاً تكون ذات تماثل نصف موجى أى أن $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$. ولقيم $0 < \omega t < \pi$ ولقيم $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$ ولقيم $0 < \omega t < \pi$.
فإن $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$ وحيث أن أشكال الموجات الزوجية تحتوى على حدود جيب تمام فقط فإن جميع $b_n = 0$ لقيم $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [V + (V/\pi)\omega t] \cos n\omega t \, d(\omega t) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [V - (V/\pi)\omega t] \cos n\omega t \, d(\omega t) \\ &= \frac{V}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\omega t \, d(\omega t) + \int_{-\pi}^0 \frac{\omega t}{\pi} \cos n\omega t \, d(\omega t) - \int_0^{\pi} \frac{\omega t}{\pi} \cos n\omega t \, d(\omega t) \right] \\ &= \frac{V}{\pi^2} \left\{ \left[\frac{1}{n^2} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{n} \sin n\omega t \right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{1}{n^2} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{n} \sin n\omega t \right]_0^{\pi} \right\} \\ &= \frac{V}{\pi^2 n^2} [\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2V}{\pi^2 n^2} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

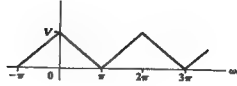
كما توقعنا من التماثل النصف موجى فإن المتوالية تحتوى على الحدود الفردية فقط حيث $a_n = 0$ لقيم $n = 2, 4, 6, \dots$ ولقيم $n = 1, 3, 5, \dots$ فإن $a_n = 4V/\pi^2 n^2$ وبالتالى فإن متوالية فوريير المطلوبة هى :

$$f(t) = \frac{V}{2} + \frac{4V}{\pi^2} \cos \omega t + \frac{4V}{(3\pi)^2} \cos 3\omega t + \frac{4V}{(5\pi)^2} \cos 5\omega t + \dots$$

تتناقص المعاملات مثل $1/n^2$ ولذلك تتقارب المتوالية بسرعة أكبر من التى فى المسألة 17-1 وهذه الحقيقة تبدو من شكل الخط الطيفى لشكل 17-21 .



شكل 17-21



شكل 17-20

17.3 أوجد متوالية فوريير المثلثية لموجة من المنشار المبينة شكل 17-22 وارسم الخط الطيفي لها .

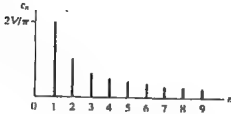
بمجرد النظر نجد أن الشكل الموجي فردى (وبالتالى فإن القيمة المتوسطة صفرا) . وبهذا تحتوى المتوالية على حدود الجيب فقط ولها تعريف واحد $f(t) = (V/\pi)\omega t$ والذى يشرح الموجة فى الفترة من $-\pi$ إلى $+\pi$ وسنستخدم هذه الحدود عند إجراء التكامل لقيم b_n .

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (V/\pi)\omega t \sin n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2} \left[\frac{1}{n^2} \sin n\omega t - \frac{\omega t}{n} \cos n\omega t \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2V}{n\pi} (\cos n\pi)$$

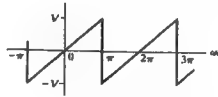
حيث أن $\cos n\pi$ لقيم n الزوجية هي $+1$ ، -1 لقيم n الفردية فإن الإشارات تتغير بالتتابع وتكون المتوالية المطلوبة هي :

$$f(t) = \frac{2V}{\pi} \left\{ \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \frac{1}{4} \sin 4\omega t + \dots \right\}$$

تتناقص المعاملات مثل $1/n$ وبالتالى فإن المتوالية تتقارب ببطء كما هو مبين بالشكل الطيفي فى شكل 17-23 وفيما عد إزاحة نقطة الأصل والقيمة المتوسطة فإن هذا الشكل الموجي يكون مثل ما فى شكل 17-8 ، قارن الطيفين .



شكل 17-23



شكل 17-22

17.4 أوجد متوالية فوريير المثلثية للشكل الموجى المبين فى شكل 17-24 وارسم خطوط الطيف .

فى فترة $0 < \omega t < \pi$ ، $f(t) = (V/\pi)\omega t$ ، وللفترة $\pi < \omega t < 2\pi$ ، $f(t) = 0$ ، وبمجرد النظر فإن النتيجة المتوسطة للموجة $V/4$. ونظرا لأن الموجة ليست زوجية أو فردية فإن المتوالية ستحتوى على كلا حدود الجيب وجيب التمام لقيم $n > 0$ ولذلك :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (V/\pi)\omega t \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2} \left[\frac{1}{n^2} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{n} \sin n\omega t \right]_0^\pi = \frac{V}{\pi^2 n^2} (\cos n\pi - 1)$$

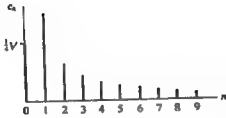
When n is even, $\cos n\pi - 1 = 0$ and $a_n = 0$. When n is odd, $a_n = -2V/(\pi^2 n^2)$. The b_n coefficients are

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (V/\pi)\omega t \sin n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2} \left[\frac{1}{n^2} \sin n\omega t - \frac{\omega t}{n} \cos n\omega t \right]_0^\pi = -\frac{V}{\pi n} (\cos n\pi) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{V}{\pi n}$$

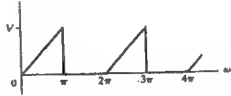
وبالتالى فإن متوالية فوريير المطلوبة هى :

$$f(t) = \frac{V}{4} - \frac{2V}{\pi^2} \cos \omega t - \frac{2V}{(3\pi)^2} \cos 3\omega t - \frac{2V}{(5\pi)^2} \cos 5\omega t - \dots$$

$$+ \frac{V}{\pi} \sin \omega t - \frac{V}{2\pi} \sin 2\omega t + \frac{V}{3\pi} \sin 3\omega t - \dots$$



شكل 17-25



شكل 17-24

نحصل على قيم التوافقيات الزوجية مباشرة من $|b_n|$ حيث يوجد حدود جيب تمام من التوافقيات الزوجية ومع هذا فإن قيم التوافقيات الفردية يجب أن تحسب باستخدام $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ وبالتالى :

$$c_1 = \sqrt{(2V/\pi^2)^2 + (V/\pi)^2} = V(0.377) \quad c_3 = V(0.109) \quad c_5 = V(0.064)$$

الشكل الطيفى مبين شكل 17-25 .

17.5 : أوجد متوالية فوريير المثلثية لنصف الموجة الجيبية الموحدة المبينة فى شكل 17-26 وارسم خطوط الطيف .

الموجة لا يبدو فيها أى تماثل ونتوقع لذلك أن المتوالية تحتوى على كلا حدود الجيب وجيب التمام وحيث أن القيمة المتوسطة لا يمكن الحصول عليها بمجرد النظر فإننا نحسب a_n لاستعمالها فى الحد $a_0/2$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V \sin \omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} [-\cos \omega t]_0^{\pi} = \frac{2V}{\pi}$$

بعد ذلك نحصل على a_n .

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V \sin \omega t \cos n \omega t d(\omega t) \\ = \frac{V}{\pi} \left[\frac{-n \sin \omega t \sin n \omega t - \cos n \omega t \cos \omega t}{-n^2 + 1} \right]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi(1 - n^2)} (\cos n\pi + 1)$$

حينما n تكون زوجية فإن $a_n = 2V / (1 - n^2)$ ومع n الفردية فإن $a_n = 0$. ومع هذا فإن هذه القيمة لا تكون محددة عند $n = 1$ ولذلك فيجب إجراء تكاملاً منفصلاً لقيمة a_1 .

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V \sin \omega t \cos \omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin 2\omega t d(\omega t) = 0$$

والآن نقدر b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V \sin \omega t \sin n \omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \left[\frac{n \sin \omega t \cos n \omega t - \sin n \omega t \cos \omega t}{-n^2 + 1} \right]_0^{\pi} = 0$$

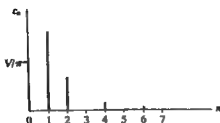
وهنا أيضاً تكون القيمة غير محددة عند $n = 1$ ونقدر b_1 منفردة كالتالى:

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V \sin^2 \omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{V}{2}$$

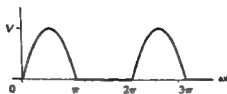
وبالتالى فإن متوالية فوريير المطلوبة هى:

$$f(t) = \frac{V}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sin \omega t - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$$

يبين شكل الطيف فى شكل 17-27 قوة الحد الأساسى فى المتوالية والقيم المتناقصة سريعاً للتوافقيات.



شكل 17-27



شكل 17-26

17.6 أوجد متوالية فوريير المثلثية لنصف الموجة الجيبية الموحدة المبينة شكل 17-28 حيث أزيح المحور الرأسى من مكانه الذى كان فى شكل 17-26.

توصف الدائرة فى الفترة $0 < \omega t < \pi$ بالقيمة $f(t) = -V \sin \omega t$ ، والقيمة المتوسطة هى نفسها كما فى المسألة 17-5 أى أن $a_0 = V/\pi$ وللمعاملات لدينا :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-V \sin \omega t) \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi(1-n^2)} (1 + \cos n\pi)$$



شكل 17-28

لقيم n الزوجية $a_n = 2V/\pi (1-n^2)$ ، ولقيم n الفردية $a_n = 0$ فيما عدا $n = 1$ التى يجب أن تستتج بفردتها .

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-V \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t) = 0$$

وللحصول على المعاملات b_n فإن :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-V \sin \omega t) \sin n\omega t d(\omega t) = 0$$

فيما عدا $n = 1$.

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-V) \sin^2 \omega t d(\omega t) = -\frac{V}{2}$$

وبالتالى فإن المتوالية هى :

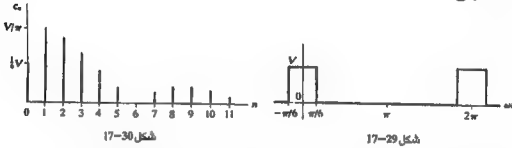
$$f(t) = \frac{V}{\pi} \left(1 - \frac{\pi}{2} \sin \omega t - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$$

وهذه المتوالية مطابقة لتلك فى المسألة 5-17 فيما عد الحد الأساسى حيث معاملات تكون سالبة فى هذه المتوالية . ومن الواضح أن شكل الطيف سيكون مطابقاً لشكل 17-27 .

طريقة أخرى :

حيما نطرح الموجة الجيبية $V \sin \omega t$ من الرسم لشكل 17-26 فإنه ينتج شكل 17-28 .

17.7 أوجد متواليات فوريير المثلثية للنضبة المربعة المتكررة المبينة فى شكل 17-25 وارسم الخط الطيفى .



ويوضع المحور الرأسى كما هو مبين فإن الموجة تكون زوجية وستشمل المتوالية على حدود جيب التمام فقط . وفى الفترة من $-\pi$ إلى π المستخدمة لإجراء التكامل فإن الدالة تكون صفرا فيما عد فى الفترة من $-\pi/6$ إلى $\pi/6$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} V d(\omega t) = \frac{V}{3} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} V \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{6}$$

حيث أن $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ لقيم $\sin n\pi/6 = 1/2, \sqrt{3}/2, 1, \sqrt{3}/2, 0, -1/2, \dots$ على

التوالى فإن المتوالية تكون :

$$f(t) = \frac{V}{6} + \frac{2V}{\pi} \left[\frac{1}{2} \cos \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \cos 2\omega t + 1 \left(\frac{1}{3} \right) \cos 3\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{4} \right) \cos 4\omega t + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \right) \cos 5\omega t - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} \right) \cos 7\omega t - \dots \right]$$

$$f(t) = \frac{V}{6} + \frac{2V}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin (n\pi/6) \cos n\omega t$$

ويتناقص شكل الطيف المبين في شكل 17-30 ببطء شديد لهذه الموجة حيث أن المتوالية تتقارب ببطء شديد إلى الدالة . ومن المثير حقاً أن قيم توافقيات الحد الثامن والتاسع والعاشر تزيد عن السابع . بالمقارنة مع أشكال الموجات البسيطة التي درست سابقاً فإن القيم للتوافقيات الأعلى كانت تتناقص تدريجياً .

17.8 أوجد متوالية فوريير للأسية للموجة المربعة المبينة في شكل 17-8 ، 17-31 وارسم خط الطيف وأوجد معاملات المتوالية المثلثية من تلك المتوالية الأسية وقارن مع المسألة 17-1 .

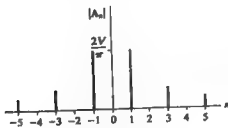
في الفترة $0 < \omega t < \pi$ ، $f(t) = -V$ ، وللفترة $0 < \omega t < \pi$ فإن $f(t) = V$. الموجة فردية لذلك $A_0 = 0$ والمعاملات A_n ستكون تخيلية خالصة .

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-V) e^{-j n \omega t} d(\omega t) + \int_0^{\pi} V e^{-j n \omega t} d(\omega t) \right] \\ &= \frac{V}{2\pi} \left\{ - \left[\frac{1}{(-jn)} e^{-j n \omega t} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{1}{(-jn)} e^{-j n \omega t} \right]_0^{\pi} \right\} \\ &= \frac{V}{-j2\pi n} (-e^{jn\pi} + e^{-jn\pi} - e^0 + e^0) = j \frac{V}{\pi n} (e^{jn\pi} - 1) \end{aligned}$$

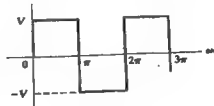
لقيم n الزوجية $e^{jn\pi} = +1$ ، $e^{-jn\pi} = -1$ ، ولقيم n الفردية $e^{jn\pi} = -1$ ، $e^{-jn\pi} = +1$ ، $A_n = j(2V/n\pi)$ (تمثل نصف موجى وتكون متوالية فوريير المطلوبة هي :

$$f(t) = \dots + j \frac{2V}{3\pi} e^{-j3\omega t} + j \frac{2V}{\pi} e^{-j\omega t} - j \frac{2V}{\pi} e^{j\omega t} - j \frac{2V}{3\pi} e^{j3\omega t} - \dots$$

الرسم في شكل 17-32 يبين القيم لكلا الترددتين الموجب والسالب وبمقارنة القيم عند $+n$ ، $-n$ نحصل على نفس الخط الطيفي كما هو مرسوم في شكل 17-19 .



شكل 17-32



شكل 17-31

معاملات جيب التمام للمتوالية المثلثية هي :

$$a_n = 2 \operatorname{Re} A_n = 0$$

and

$$b_n = -2 \operatorname{Im} A_n = \frac{4V}{n\pi} \quad \text{for odd } n \text{ only}$$

وهي تتفق مع المعاملات التي حصلنا عليها في المسألة 17-1 .

17.9 أوجد متوالية فوريير الأسية للموجة المثلثية المبينة شكل 17-20 ، 17-33 وارسم الخط الطيفي .

في الفترة $0 < \omega t < \pi$ ، $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$ ، ولقيم $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$ ، $0 < \omega t < \pi$. وتكون الموجة زوجية وبالتالي فإن المعاملات a_n ستكون حقيقية خالصة وبمجرد النظر فإن القيمة المتوسطة هي $V/2$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 [V + (V/\pi)\omega t] e^{-j n \omega t} d(\omega t) + \int_0^{\pi} [V - (V/\pi)\omega t] e^{-j n \omega t} d(\omega t) \right\} \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \left[\int_{-\pi}^0 \omega t e^{-j n \omega t} d(\omega t) + \int_0^{\pi} (-\omega t) e^{-j n \omega t} d(\omega t) + \int_{-\pi}^{\pi} \pi e^{-j n \omega t} d(\omega t) \right] \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \left\{ \left[\frac{e^{-j n \omega t}}{(-j n)^2} (-j n \omega t - 1) \right]_{-\pi}^0 - \left[\frac{e^{-j n \omega t}}{(-j n)^2} (-j n \omega t - 1) \right]_0^{\pi} \right\} = \frac{V}{\pi^2 n^2} (1 - e^{j n \pi}) \end{aligned}$$

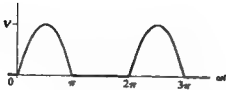
لقيم n الزوجية $+1 = e^{j n \pi}$ ، $A_n = 0$ ، وقيم n الفردية $A_n = 2V/\pi^2 n^2$ وبالتالي فإن المتوالية هي :

$$f(t) = \dots + \frac{2V}{(-3\pi)^2} e^{-j3\omega t} + \frac{2V}{(-\pi)^2} e^{-j\omega t} + \frac{V}{2} + \frac{2V}{(\pi)^2} e^{j\omega t} + \frac{2V}{(3\pi)^2} e^{j3\omega t} + \dots$$

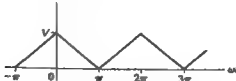
وقيم التوافقيات .

$$c_0 = \frac{V}{2} \quad c_n = 2|A_n| = \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6, \dots) \\ 4V/\pi^2 n^2 & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases}$$

وهي تماماً كما رسمت في شكل 17-21 .



شكل 17-34



شكل 17-33

17.10 أوجد متوالية فوريير للأسية لنصف الموجة الطيفي الجيبى الموحد المبين فى شكل 17-26 ، 17-34 وارسم خط الطيف .

فى الفترة $0 < \omega t < \pi$ $f(t) = V \sin \omega t$ ، من π إلى 2π ، $f(t) = 0$ وبالتالى :

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} V \sin \omega t e^{-jn\omega t} d(\omega t)$$

$$= \frac{V}{2\pi} \left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(1-n^2)} (-jn \sin \omega t - \cos \omega t) \right]_0^{\pi} = \frac{V(e^{-jn\pi} + 1)}{2\pi(1-n^2)}$$

لقيم n الزوجية $A_n = V/\pi (1-n^2)$ ولقيم n الفردية $A_n = 0$ ومع هذا فإنه عند $n = 1$ فإن العلاقة A_n تصبح غير معروفة ونطبق هنا قاعدة لوبيتال أى أن كل من البسط والمقام يتم تفاضلهما كلا على حده بالنسبة للقيمة n حيث يسمح لها بالاقتراب من القيمة 1 حيث تنشأ القيمة $A_1 = -j(V/4)$.

والقيمة المتوسطة هى :

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} V \sin \omega t d(\omega t) = \frac{V}{2\pi} \left[-\cos \omega t \right]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi}$$

متوالية فوريير الأسية هى :

$$f(t) = \dots - \frac{V}{15\pi} e^{-j4\omega t} - \frac{V}{3\pi} e^{-j2\omega t} + j \frac{V}{4} e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} - j \frac{V}{4} e^{j\omega t} - \frac{V}{3\pi} e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi} e^{j4\omega t} - \dots$$

وقيم التوافقيات

$$c_0 = A_0 = \frac{V}{\pi}$$

$$c_n = 2|A_n| = \begin{cases} 2V/\pi(n^2-1) & (n=2,4,6,\dots) \\ V/2 & (n=1) \\ 0 & (n=3,5,7,\dots) \end{cases}$$

وهى تماماً كما رسمت فى شكل 17-27 .

17.11 أوجد القدرة المتوسطة فى المقاومة $R = 10 \Omega$ إذا كان التيار فى شكل متوالية فوريير هو $i = 10 \sin \omega t + 5 \sin 3\omega t + 2 \sin 5\omega t$ (A).

والقيمة المؤثرة للتيار هى

The current has an effective value $I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2}(10)^2 + \frac{1}{2}(5)^2 + \frac{1}{2}(2)^2} = \sqrt{64.5} = 8.03$ A. Then the

وبالتالى فإن القدرة المتوسطة $P = I_{eff}^2 R = (8.03)^2 \times 10 = 645$ W

طريقة أخرى :

القدرة الكلية هي مجموع قدرات التوافقيات والتي تعطى بالعلاقة $(1/2) V_{\max} I_{\max} \cos \theta$ ولكن الجهد على طرفى المقاومة والتيار فى نفس الوجه لجميع التوافقيات وبالتالي $\theta = 0$.

$$v_R = Ri = 100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t + 20 \sin 5\omega t$$

$$\text{and } P = \frac{1}{2}(100)(10) + \frac{1}{2}(50)(5) + \frac{1}{2}(20)(2) = 645 \text{ W.}$$

17.12 أوجد القدرة المتوسطة المعطاه للشبكة إذا كان الجهد والتيار هما :

$$v = 50 + 50 \sin 5 \times 10^3 t + 30 \sin 10^4 t + 20 \sin 2 \times 10^4 t \quad (\text{V})$$

$$i = 11.2 \sin (5 \times 10^3 t + 63.4^\circ) + 10.6 \sin (10^4 t + 45^\circ) + 8.97 \sin (2 \times 10^4 t + 26.6^\circ) \quad (\text{A})$$

القدرة المتوسطة الكلية هي مجموع قدرات التوافقيات.

$$P = (50)(0) + \frac{1}{2}(50)(11.2) \cos 63.4^\circ + \frac{1}{2}(30)(10.6) \cos 45^\circ + \frac{1}{2}(20)(8.97) \cos 26.6^\circ = 317.7 \text{ W}$$

17.13 أوجد ثوابت لدائرة ذات عنصرين على التوالى إذا كان الجهد والتيار كما فى المسألة 17-12 .

متوالية الجهد تحتوى على القيمة الثابتة 50 ولكن لا يوجد قيمة مناظرة لها فى التيار ويعنى هذا أن أحد عنصرى الدائرة مكثف ، وحيث أن القدرة تعطى للدائرة فإن العنصر الآخر هو مقاومة .

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{2}(11.2)^2 + \frac{1}{2}(10.6)^2 + \frac{1}{2}(8.97)^2} = 12.6 \text{ A}$$

$$\text{والقدرة المتوسطة } P = I_{\text{eff}}^2 R = 317.7/159.2 = 2 \Omega \text{ ومنها } R = P/I_{\text{eff}}^2$$

وعند $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ يتقدم التيار بالجهد بالزاوية 40° ومن ثم :

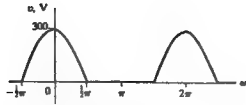
$$1 = \tan 45^\circ = \frac{1}{\omega C R} \quad \text{or} \quad C = \frac{1}{(10^4)(2)} = 50 \mu\text{F}$$

ولذلك فإن عنصرى التوالى للدائرة هما مقاومة 2Ω ، ومكثف $50 \mu\text{F}$.

17.14 وصل الجهد الموجى المبين شكل 17-35 لدائرة توالى بها $R = 2 \text{ k}\Omega$ ، $L = 10 \text{ H}$ ، استخدم

متوالية فورير المثلثية للحصول على الجهد على طرفى المقاومة . ارسم خط الطيف للجهد ، v_R

ليان تأثير الملف على التوافقيات $\omega = 377 \text{ rad/s}$.



شكل 17-35

القيمة المتوسطة للجهد V_{\max}/π كما في المسألة 17-5 الموجة زوجية وبالتالي فإن المتوالية تشمل حدود جيب التمام فقط وتحصل على معاملاتها من إجراء التكامل .

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos \omega t \cos n \omega t d(\omega t) = \frac{600}{\pi(1-n^2)} \cos n\pi/2 \quad V.$$

هنا قيمة $\cos n\pi/2$ هي 1- لقيم $n = 2, 6, 10, \dots$ وتساوي 1 لقيم $n = 4, 8, 12, \dots$ ولقيم n الفردية فإن $\cos \pi/2 = 0$ ولكن عند $n = 1$ فإن المعامل تحصل عليها منفرداً من إجراء التكامل .

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos^2 \omega t d(\omega t) = \frac{300}{\pi} \left[\frac{\omega t}{2} + \frac{\sin 2\omega t}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{300}{2} V$$

Thus,
$$v = \frac{300}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right) (V)$$

جدول 17-3

n	$n\omega$, rad/s	R , k Ω	$n\omega L$, k Ω	Z_n , k Ω	θ_n
0	0	2	0	2	0°
1	377	2	3.77	4.26	62°
2	754	2	7.54	7.78	75.1°
4	1508	2	15.08	15.2	82.45°
6	2262	2	22.62	22.6	84.92°

حسبت المعاوقة الكلية لمتوالية الدائرة لكل توافقية في علاقة الجهد . ومعاملات فوريير في متوالية التيار هي معاملات متوالية الجهد مقسومة على Z_n وحدود التيار تتأخر عن الجهد بزاوية الوجه θ .

$$I_0 = \frac{300/\pi}{2} \text{ mA}$$

$$I_1 = \frac{300/2}{4.26} \cos(\omega t - 62^\circ) \text{ (mA)}$$

$$I_2 = \frac{600/3\pi}{7.78} \cos(2\omega t - 75.1^\circ) \text{ (mA)}$$

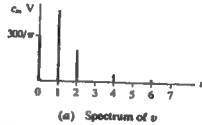
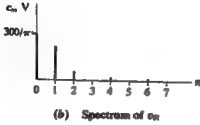
وبالتالى فإن متوالية التيار هي :

$$i = \frac{300}{2\pi} + \frac{300}{(2)(4.26)} \cos(\omega t - 62^\circ) + \frac{600}{3\pi(7.78)} \cos(2\omega t - 75.1^\circ) \\ - \frac{600}{15\pi(15.2)} \cos(4\omega t - 82.45^\circ) + \frac{600}{35\pi(22.6)} \cos(6\omega t - 84.92^\circ) - \dots \quad (\text{mA})$$

والجهد على طرفى المقاومة هو :

$$v_R = Ri = 95.5 + 70.4 \cos(\omega t - 62^\circ) + 16.4 \cos(2\omega t - 75.1^\circ) \\ - 1.67 \cos(4\omega t - 82.45^\circ) + 0.483 \cos(6\omega t - 84.92^\circ) - \dots \quad (\text{V})$$

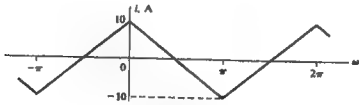
يبين شكل 17-36 بوضوح كيف أن قيم التوافقيات للجهد المستخدم قد نقصت باستخدام ممانعة التوالى الحثية 10 H.



شكل 17-36

17.15 التيار فى العنصر الحثى 10 mH له الشكل الموجى المبين فى شكل 17-37.

أوجد التوالى المثلثية للجهد على طرفى العنصر الحثى إذا كان $\omega = 500 \text{ rad/s}$.



شكل 17-36

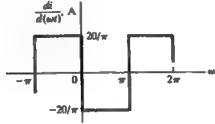
مشتقة الشكل الموجى لشكل 17-37 مرسومة فى شكل 17-38 وهى نفسها لشكل 17-18 مع

$V = -20/\pi$ وبالتالى من المسألة 17-1.

$$\frac{di}{d(\omega t)} = -\frac{80}{\pi^2} (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots) \quad (A)$$

and so

$$v_L = L\omega \frac{di}{d(\omega t)} = -\frac{400}{\pi^2} (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots) \quad (V)$$



شكل 17-38

مسائل إضافية

17.16 كَوِّن الشكل الموجي الذى فيه متوالية فوريير المثلثية هي:

$$f(t) = \frac{8V}{\pi^2} (\sin \omega t - \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t - \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots)$$

17.17 كَوِّن الشكل الموجي الذى فيه متوالية فوريير هي:

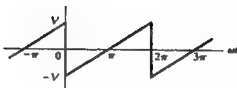
$$f(t) = 5 - \frac{40}{\pi^2} (\cos \omega t + \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t + \dots) \\ + \frac{20}{\pi} (\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \frac{1}{4} \sin 4\omega t + \dots)$$

17.18 كَوِّن الشكل الموجي لمتوالية فوريير التالية:

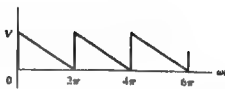
$$f(t) = V \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \cos \omega t - \frac{1}{3\pi} \cos 2\omega t + \frac{1}{2\pi} \cos 3\omega t - \frac{1}{15\pi} \cos 4\omega t - \frac{1}{6\pi} \cos 6\omega t + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sin \omega t - \frac{2}{3\pi} \sin 2\omega t + \frac{4}{15\pi} \sin 4\omega t - \dots \right)$$

17.19 أوجد متوالية فوريير المثلثية لموجة سن المنشار شكل 17-39 وارسم خط الطيف. قارن مع مثال 17-7.

$$f(t) = \frac{V}{2} + \frac{V}{\pi} (\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots) \quad \text{الجواب:}$$



شكل 17-40



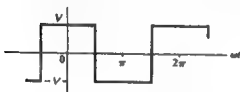
شكل 17-39

17.20 أوجد متوالية فوريير المثلثية لموجة سن المنشار المبينة شكل 17-40 وارسم خط الطيف . قارن مع نتائج المسألة 17-3 .

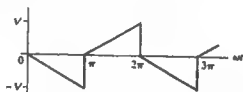
$$f(t) = \frac{-2V}{\pi} \left\{ \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right\} \quad \text{الجواب :}$$

17.21 أوجد متوالية فوريير المثلثية للشكل الموجي المبين شكل 17-41 وارسم خط الطيف .

$$f(t) = \frac{4V}{\pi^2} \left\{ \cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots \right\} - \frac{2V}{\pi} \left\{ \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right\} \quad \text{الجواب :}$$



شكل 17-42



شكل 17-41

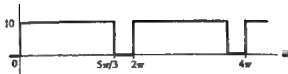
17.22 أوجد متوالية فوريير المثلثية للموجة المربعة المبينة شكل 17-42 وارسم خط الطيف . قارن مع نتائج المسألة 17-1 .

$$f(t) = \frac{4V}{\pi} \left\{ \cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots \right\} \quad \text{الجواب :}$$

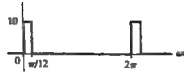
17.23 أوجد متوالية فوريير المثلثية لشكلى الموجات المبينة شكل 17-34 وارسم خط الطيف لكل منهما وقارن بينهما .

$$(a) \quad f(t) = \frac{5}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{10}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{12} \right) \cos n\omega t + \frac{10}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{12} \right) \sin n\omega t \right] \quad \text{الجواب :}$$

$$(b) \quad f(t) = \frac{50}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{10}{n\pi} \left(\sin \frac{n5\pi}{3} \right) \cos n\omega t + \frac{10}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n5\pi}{3} \right) \sin n\omega t \right]$$



(b)

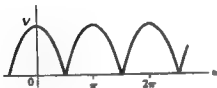


(a)

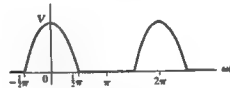
شكل 17-43

17.24 أوجد متوالية فوريير المثلثية لنصف الموجة الجيبية الموحدة المبينة شكل 17-44 وارسم خط الطيف وقارن النتائج مع المسألتين 17-5 ، 17-6 .

$$\text{Ans. } f(t) = \frac{V}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$$



شكل 17-45



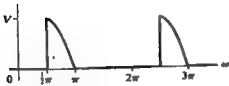
شكل 17-44

17.25 أوجد متوالية فوريير المثلثية للموجة الجيبية الموحدة كاملا المبينة شكل 17-45 وارسم خط الطيف .

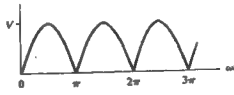
$$\text{الجواب: } f(t) = \frac{2V}{\pi} \left(1 + \frac{3}{2} \cos 2\omega t - \frac{3}{10} \cos 4\omega t + \frac{3}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$$

17.26 الموجه في شكل 17-46 هى نفسها التى فى شكل 17-45 مع إزاحة نقطة الأصل وأوجد متوالية فوريير وبين أن الطيفين متطابقان .

$$\text{الجواب: } f(t) = \frac{2V}{\pi} \left(1 - \frac{3}{2} \cos 2\omega t - \frac{3}{10} \cos 4\omega t - \frac{3}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$$



شكل 17-47



شكل 17-46

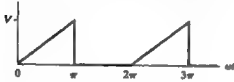
17.27 أوجد متوالية فوريير المثلثية للشكل الموجى المبين فى شكل 17-47 .

$$f(t) = \frac{V}{2\pi} - \frac{V}{2\pi} \cos \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V}{\pi(1-n^2)} (\cos n\pi + n \sin n\pi/2) \cos n\omega t$$

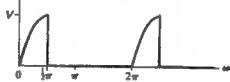
$$+ \frac{V}{4} \sin \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{-nV \cos n\pi/2}{\pi(1-n^2)} \right] \sin n\omega t$$

17.28 أوجد متوالات فوريير المثلثية المبينة فى شكل 17-48 وأضف حدود هذه المتوالية فى المسألة 17-27 وقارن المجموع مع المتوالية للمسألة 17-5 .

$$f(t) = \frac{V}{2\pi} + \frac{V}{2\pi} \cos \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V(n \sin n\pi/2 - 1)}{\pi(n^2 - 1)} \cos n\omega t + \frac{V}{4} \sin \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nV \cos n\pi/2}{\pi(1-n^2)} \sin n\omega t$$



شكل 17-49



شكل 17-48

17.29 أوجد متوالية فوريير الأسية للشكل الموجى فى شكل 17-49 وارسم خط الطيف . حول المعاملات التى حصلت عليها هنا لمعاملات المتوالية المثلثية واكتب المتوالية المثلثية وقارنها مع نتائج المسألة 17-4 .

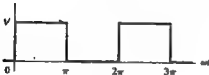
$$f(t) = V \left[\dots - \left(\frac{1}{9\pi^2} - j \frac{1}{6\pi} \right) e^{-j3\omega t} - j \frac{1}{4\pi} e^{-j\omega t} - \left(\frac{1}{\pi^2} - j \frac{1}{2\pi} \right) e^{-j\omega t} + \frac{1}{4} \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{\pi^2} + j \frac{1}{2\pi} \right) e^{j\omega t} + j \frac{1}{4\pi} e^{j3\omega t} - \left(\frac{1}{9\pi^2} + j \frac{1}{6\pi} \right) e^{j3\omega t} - \dots \right]$$

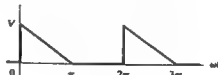
17-30 أوجد متوالية فوريير الأسية للشكل الموجى المبين فى شكل 17-50 وارسم خط الطيف .

$$f(t) = V \left[\dots + \left(\frac{1}{9\pi^2} + j \frac{1}{6\pi} \right) e^{-j3\omega t} + j \frac{1}{4\pi} e^{-j\omega t} + \left(\frac{1}{\pi^2} + j \frac{1}{2\pi} \right) e^{-j\omega t} + \frac{1}{4} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi^2} - j \frac{1}{2\pi} \right) e^{j\omega t} - j \frac{1}{4\pi} e^{j3\omega t} + \left(\frac{1}{9\pi^2} - j \frac{1}{6\pi} \right) e^{j3\omega t} + \dots \right]$$



شكل 17-51



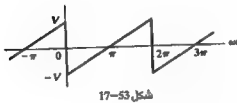
شكل 17-50

17.31 أوجد متوالية فوريير الأسية للموجة المربعة المبينة فى شكل 17-51 وارسم خط الطيف أضف المتوالية الأسية للمسألة 17-29 ، 17-30 وقارن المجموع مع المتوالية التى حصلت عليها هنا .

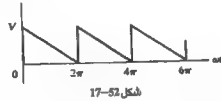
$$f(t) = V \left(\dots + j \frac{1}{3\pi} e^{-j3\omega t} + j \frac{1}{\pi} e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} - j \frac{1}{\pi} e^{j\omega t} - j \frac{1}{3\pi} e^{j3\omega t} - \dots \right) \quad \text{الجواب :}$$

17.32 أوجد متوالية فوريير الأسية لموجة سن المنشار المبينة فى شكل 17-52 وارسم خط الطيف . حول المعاملات التى حصلت عليها هنا إلى معاملات المتوالية المثلثية وأكتب المتوالية المثلثية وقارن النتائج مع المتوالية التى حصلت عليها فى المسألة 17-19 .

$$f(t) = V \left(\dots + j \frac{1}{4\pi} e^{-j2\omega t} + j \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} - j \frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} - j \frac{1}{4\pi} e^{j2\omega t} - \dots \right) \quad \text{الجواب :}$$



شكل 17-53



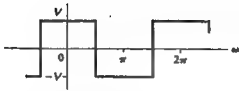
شكل 17-52

17.33 أوجد متوالية فوريير الأسية للشكل الموجى المبين فى شكل 17-53 وارسم الخط الطيف . حول معاملات المتوالية المثلثية الموجودة فى المسألة 17-20 إلى معاملات المتوالية الأسية وقارنها مع معاملات المتوالية التى حصلت عليها هنا .

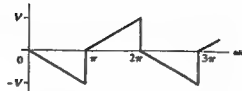
$$f(t) = V \left(\dots - j \frac{1}{2\pi} e^{-j2\omega t} - j \frac{1}{\pi} e^{-j\omega t} + j \frac{1}{\pi} e^{j\omega t} + j \frac{1}{2\pi} e^{j2\omega t} + \dots \right) \quad \text{الجواب :}$$

17.34 أوجد متوالية فوريير الأسية للشكل الموجى المبين فى شكل 17-54 حول المعاملات إلى معاملات المتوالية المثلثية وأكتب المتوالية المثلثية وقارنها مع نتائج مسألة 17-21 .

$$f(t) = V \left[\dots + \left(\frac{2}{9\pi^2} - j \frac{1}{3\pi} \right) e^{-j3\omega t} + \left(\frac{2}{\pi^2} - j \frac{1}{\pi} \right) e^{-j\omega t} + \left(\frac{2}{\pi^2} + j \frac{1}{\pi} \right) e^{j\omega t} + \left(\frac{2}{9\pi^2} + j \frac{1}{3\pi} \right) e^{j3\omega t} + \dots \right]$$



شكل 17-55



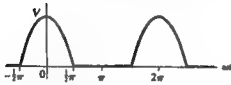
شكل 17-54

17.35 أوجد متوالية فوريير الأسية للموجة المربعة المبينة فى شكل 17-55 وارسم خط الطيف حول معاملات المتوالية المثلثية للمسألة 17-22 إلى معاملات المتوالية الأسية وقارن بالمعاملات التى حصلت عليها هنا .

$$f(t) = \frac{2V}{\pi} (\dots + \frac{1}{2}e^{-j2\omega t} - \frac{1}{2}e^{-j2\omega t} + e^{-j\omega t} + e^{j\omega t} - \frac{1}{2}e^{j2\omega t} + \frac{1}{2}e^{j2\omega t} - \dots)$$

17.36 أوجد متوالية فوريير الأسية للشكل الموجى المبين فى شكل 17-56 وارسم خط الطيف .

$$f(t) = \dots + \frac{V}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)e^{-j2\omega t} + \frac{V}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)e^{-j\omega t} + \frac{V}{6} + \frac{V}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)e^{j\omega t} + \frac{V}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)e^{j2\omega t} + \dots$$



شكل 17-57



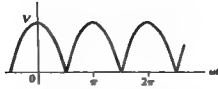
شكل 17-56

17.37 أوجد متوالية فوريير الأسية لنصف الموجة الجيبية أو الموحدة المبينة فى شكل 17-57. حول هذه المعاملات إلى معاملات المتوالية المثلثية وأكتب المتوالية المثلثية وقارنها مع نتائج المسألة 17-24 .

$$f(t) = \dots - \frac{V}{15\pi} e^{-j4\omega t} + \frac{V}{3\pi} e^{-j2\omega t} + \frac{V}{4} e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} + \frac{V}{4} e^{j\omega t} + \frac{V}{3\pi} e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi} e^{j4\omega t} + \dots$$

17.38 أوجد متوالية فوريير الأسية للموجة الجيبية الموحدة كاملا المبينة فى شكل 17-58 وارسم خط الطيف .

$$f(t) = \dots - \frac{2V}{15\pi} e^{-j4\omega t} + \frac{2V}{3\pi} e^{-j2\omega t} + \frac{2V}{\pi} + \frac{2V}{3\pi} e^{j2\omega t} - \frac{2V}{15\pi} e^{j4\omega t} + \dots$$



شكل 17-58

17.39 أوجد الجهد المؤثر والتيار والقدرة المتوسطة لشبكة غير فعالة إذا كان الجهد هو

$$v = 200 + 100 \cos(500t + 30^\circ) + 75 \cos(1500t + 60^\circ) \text{ (V)}$$

$$i = 3.53 \cos((500t + 75^\circ) + 3.55 \cos(1500t + 78.45^\circ) \text{ (A)}$$

الجواب: 218.5 V, 3.54 A, 250.8 W

17.40 وصل الجهد $v = 50 + 25 \sin 500t + 10 \sin 2500t$ (V) للشبكة الغير فعالة بحيث كان التيار

$$i = 5 + 2.23 \sin(500t - 26.6^\circ) + 0.556 \sin(1500t - 56.3^\circ) + 0.186 \sin(2500t - 68.2^\circ) \text{ (A)}$$

أوجد الجهد المؤثر والتيار المؤثر ومتوسط القدرة. الجواب: 53.6 V, 5.25 A, 276.5 W

17.41 دائرة توالى لها ثلاث عناصر بها $R = 5 \Omega$, $L = 5 \text{ mH}$, $C = 50 \mu\text{F}$ بها الجهد $v = 150 \sin 1000t + 100 \sin 2000t + 75 \sin 3000t$ (V)

ارسم خط الطيف للجهد والتيار ولاحظ تأثير رنين التوالى.

الجواب: 16.58 A, 1374 W

17.42 دائرة توالى ذات عنصرين بها $R = 10 \Omega$, $L = 20 \text{ mH}$ بها التيار

$$i = 5 \sin 100t + 3 \sin 300t + 2 \sin 500t \text{ (A)}$$

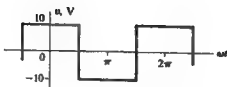
أوجد تيار الدائرة المؤثر والقدرة المتوسطة. الجواب: 48 V, 190 W

17.43 عنصر حتى خالص $L = 10 \text{ mH}$ له موجة تيار مثلثة كما فى شكل 17-59 حيث $\omega = 500 \text{ rad/s}$

أوجد متوالية فورير للأسية للجهد على طرفى العنصر الخئى قارن الإجابة مع نتائج المسألة 17-8.

$$v_L = \frac{200}{\pi^2} (\dots - \frac{1}{3} e^{-j3\omega t} - \frac{1}{5} e^{-j5\omega t} + \frac{1}{3} e^{j3\omega t} + \frac{1}{5} e^{j5\omega t} + \dots) \text{ (V)}$$

الجواب:



شكل 17-60



شكل 17-59

17.44 عنصر حتى خالص $L = 10 \text{ mH}$ عليه جهد ذو شكل موجي كما هو مبين في شكل 17-60 حيث $\omega = 200 \text{ rad/s}$ أوجد متوالية التيار في الشكل المثلي وعرف الشكل الموجي للتيار.

$$i = \frac{20}{\pi} (\sin \omega t - \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t - \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots) \quad (\text{A}); \text{triangular} \quad \text{الجواب:}$$

17.45 يبين شكل 17-61 موجة جيبيية موحدة كاملا وهي تمثل الجهد على طرفي دائرة توالي LC استخدم متوالية فوريير المثلثية لإيجاد الجهد على طرفي الملف والمكثف.

$$v_L = \frac{4V_m}{\pi} \left[\frac{2\omega L}{3\left(2\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right)} \cos 2\omega t - \frac{4\omega L}{15\left(4\omega L - \frac{1}{4\omega C}\right)} \cos 4\omega t + \dots \right] \quad \text{الجواب:}$$

$$v_C = \frac{4V_m}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3(2\omega C)\left(2\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right)} \cos 2\omega t + \frac{1}{15(4\omega C)\left(4\omega L - \frac{1}{4\omega C}\right)} \cos 4\omega t - \dots \right]$$



شكل 17-61

17.46 دائرة تحتوي على ثلاث عناصر مكونة من $R = 5 \Omega$ وهي على التوالي مع مجموعة توازي

مكونة من C ، L ، وعند $\omega = 500 \text{ rad/s}$ ، $X_C = 8 \Omega$ ، $X_L = 2 \Omega$ أوجد التيار الكلي إذا كان

$$v = 50 + 20 \sin 500t + 10 \sin 1000t \quad (\text{V}) \quad \text{جهد الدائرة هو}$$

$$i = 10 + 3.53 \sin (500t - 28.1^\circ) \quad (\text{A}) \quad \text{الجواب:}$$

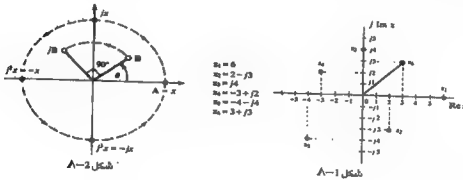
ملحق A نظام الأعداد المركبة

A1 الأعداد المركبة

العدد المركب z هو عدد في صورة $x + jy$ حيث x, y هي أعداد حقيقية، $j = \sqrt{-1}$. ونكتب $x = \text{Re } z$ وهي الجزء الحقيقي للعدد z ، $y = \text{Im } z$ وهي الجزء التخيلي للعدد z . وإذا كانت الأجزاء الحقيقية متساوية والأجزاء التخيلية متساوية لعددين كان العددين متساويين.

A2 المستوى المركب

لزوج من المحاور المتعامدة بحيث يمثل المحور الأفقي $\text{Re } z$ والمحور الرأسى $\text{Im } z$ يحددان المستوى المركب الذى فيه كل عدد مركب تمثله نقطة واحدة وبالرجوع لشكل A-1 والذى فيه نبين ستة أعداد مركبة يبدو منه أن كل عدد مركب يمثلته متجه خاص به من نقطة الأصل فى المستوى المركب كما هو مبين للعدد المركب z_6 فى شكل A-1.



A3 المعامل المتجه j

بالإضافة لتعريف j المذكور فى بند A1 يمكن النظر إليه كمعامل يعمل على إدارة (لف) أى عدد مركب (متجه) A بالزاوية 90° فى اتجاه عكس عقارب الساعة وفى حالة كون A كمية حقيقية خالصة، مثل x المبينة فى شكل A-2 فإن دوران A يحولها إلى jx على المحور الموجب التخيلى وبلاستمرار فى ذلك فإن j^2 يتقدم عن A 180° ، j^3 270° و j^4 360° . مبين أيضاً فى شكل A-2 العدد المركب B فى الربع الأول ويصنع الزاوية θ . لاحظ أن B فى الربع الثانى عند الزاوية $\theta + 90^\circ$.

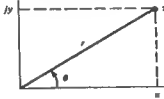
A4 التمثيلات الأخرى للأعداد المركبة

عرفت الأعداد المركبة بند A1 بشكلى الإحداثيات. وفى شكل A-3 $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$

والعدد المركب x يمكن كتابته في الشكل المثلثي كالتالي:

$$z = x + jy = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

حيث r هي الرقمي الحسابي أو القيمة المطلقة (والتعبير $r = |z|$ هو المستعمل الشائع) بحيث أن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، الزاوية $\theta = \tan^{-1} (y/x)$ وهي زاوية العدد z .



شكل 3-أ

تسمح علاقة أويلر بتمثيل آخر للعدد المركب يسمى الشكل الأسّي.

$$z = r \cos \theta + jr \sin \theta = re^{j\theta}$$

وشكل آخر شائع الاستعمال في تحليل الدوائر هو شكل ستانينمتر القطبي $z = r \angle \theta$ حيث θ بالدرجات.

A5 جمع وطرح الأعداد المركبة

لجمع عددين مركبين فإننا نجمع الأجزاء الحقيقية معا والأجزاء المركبة معا وفي الطرح كذلك نطرح الأجزاء الحقيقية معا ونطرح الأجزاء التخيلية معا ومن وجهة النظر العملية فإننا نقوم بعملية الجمع والطرح بطريقة أسهل، حينما يكون كلا العددين في شكل الإحداثيات.

مثال 5.1: إذا كان $z_1 = 5 - j2$ ، $z_2 = -3 - j8$.

$$z_1 + z_2 = (5 - 3) + j(-2 - 8) = 2 - j10$$

$$z_2 - z_1 = (-3 - 5) + j(-8 + 2) = -8 - j6$$

A6 ضرب الأعداد المركبة

نضرب عددين مركبين حينما يكون كلاهما في الشكل الأسّي ويكون الناتج مباشرة من قوانين الأس.

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

وحاصل ضرب ستانينمتر القطبي مستنتج من الشكل القطبي.

$$z_1 z_2 = (r_1 \angle \theta_1)(r_2 \angle \theta_2) = r_1 r_2 \angle \theta_1 + \theta_2$$

وحاصل الضرب بالطريقة المثلثية يمكن التعامل معه كأعداد مركبة ذات حدين .

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1 x_2 + jx_1 y_2 + jy_1 x_2 + j^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

مثال A.2 : If $z_1 = 5e^{j\pi/3}$ and $z_2 = 2e^{-j\pi/6}$, then $z_1 z_2 = (5e^{j\pi/3})(2e^{-j\pi/6}) = 10e^{j\pi/6}$.

مثال A.3 : If $z_1 = 2/30^\circ$ and $z_2 = 5/-45^\circ$, then $z_1 z_2 = (2/30^\circ)(5/-45^\circ) = 10/-15^\circ$.

مثال A.4 : If $z_1 = 2 + j3$ and $z_2 = -1 - j3$, then $z_1 z_2 = (2 + j3)(-1 - j3) = 7 - j9$.

A7 قسمة الأعداد المركبة

خارج قسمة عددين مركبين في الشكل الأسى يستتج مباشرة من قوانين الأس.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

ومرة أخرى فإن الشكل القطبي لستينمتر في القسمة يستتج من الشكل الأسى

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 / \theta_1}{r_2 / \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} / \theta_1 - \theta_2$$

وقسمة عددا مركبان في الشكل الإحداثي يكون بضرب كلا البسط والمقام بمرافق المقام (انظر

بند A.8).

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \left(\frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} \right) = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

مثال A.5 : إذا كان Given $z_1 = 4e^{j\pi/3}$ and $z_2 = 2e^{j\pi/6}$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4e^{j\pi/3}}{2e^{j\pi/6}} = 2e^{j\pi/6}$$

مثال A.6 : إذا كان Given $z_1 = 8/-30^\circ$ and $z_2 = 2/-60^\circ$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8/-30^\circ}{2/-60^\circ} = 4/30^\circ$$

مثال A.7 : إذا كان Given $z_1 = 4 - j5$ and $z_2 = 1 + j2$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 - j5}{1 + j2} \left(\frac{1 - j2}{1 - j2} \right) = -\frac{6}{5} - j\frac{13}{5}$$

A8 مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = x + jy$ هو العدد المركب $z^* = x - jy$ وبالتالي فإن :

$$\text{Re } z = \frac{z + z^*}{2} \quad \text{Im } z = \frac{z - z^*}{2j} \quad |z| = \sqrt{zz^*}$$

في المستوى المركب النقط z ، z^* هي كمورة مرآة لارتفاعها محور القيم الحقيقية

في الشكل الاسي : $z = re^{j\theta}$ ، $z^* = re^{-j\theta}$.

في الشكل القطبي : $z = r \angle \theta$ ، $z^* = r \angle -\theta$.

في الشكل المثلثي : $z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$ ، $z^* = r(\cos \theta - j \sin \theta)$.

$$(i) \quad (z^*)^* = z$$

$$(iii) \quad (x_1 x_2)^* = x_1^* x_2^*$$

$$(ii) \quad (x_1 \pm x_2)^* = x_1^* \pm x_2^*$$

$$(iv) \quad \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^* = \frac{x_1^*}{x_2^*}$$

المصفوفات والمحددات

ذات الشكل .

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

ويمكن الحصول على شكل أفضل لهذه المعادلات بالتعبير عنها بشكل المصفوفة.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$d(\mathbf{A}) = m \times n$$

B2 أنواع المصفوفات

المصفوفة الصفيرية: وهي التي بها جميع العناصر صفرا.

المصفوفة المربعة: وهي التي بها عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة. $d(A) = n \times n$

المصفوفة التماثلية: والتي تكون على شكل

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad d(A) = m \times n$$

ومعكوس المصفوفة A هو:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{m3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad d(A^T) = n \times m$$

حيث سنعرف المصفوفة A هي أعمدة المصفوفة A^T والعكس بالعكس. والمصفوفة A تكون متماثلة إذا كان $A = A^T$ وبالتالي فإن المصفوفة التماثلية يجب أن تكون مربعة.

مصفوفة هيرميثان وتعنى بالشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

والمرافق للمصفوفة A هو:

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* & \dots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^* & a_{m2}^* & a_{m3}^* & \dots & a_{mn}^* \end{bmatrix}$$

المصفوفة A تكون هيرميثان إذا كان $A = (A^*)^T$ أى أن مصفوفة هيرميثان هي مصفوفة مربعة ذات عناصر حقيقية فى القطر الرئيسى وعناصر مركبة مترافقة تشغل الأماكن المتقابلة لصورة مرآة بالنسبة للقطر الرئيسى نلاحظ أن $(A^*)^T = (A^T)^*$.

المصفوفة الغير فردية: المصفوفة المربعة $n \times n$ ليست فردية (أو قابلة للتحويل) إذا وجدت مصفوفة مربعة أخرى $n \times n$ حيث أن:

$$AB = BA = I$$

بحيث I هي مصفوفة الوحدة $n \times n$ وتسمى المصفوفة B مقلوب المصفوفة A غير فردية ونكتب $B = A^{-1}$ وإذا كانت A غير فردي فإن معادلة المصفوفة $Y = AX$ فى بند I لها لكل قيمة للمصفوفة Y الحل الوحيد.

$$X = A^{-1}Y$$

B3 حسابات المصفوفات

جمع وطرح المصفوفات :

المصفوفتان اللتان لهما نفس الرتبة تكونان قابلتين للجمع أو الطرح والمصفوفتان اللتان لهما رتبتين مختلفتين لا يمكن جمعهما .

مجموع (أو طرح) مصفوفتين $m \times n$: $A = [a_{ij}]$ ، $B = [b_{ij}]$ هي المصفوفة $m \times n$ التي فيها كل عنصر هو مجموع (أو طرح) العنصرين المناظرين في كل من A ، B وبالتالي فإن $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{مثال 1 : إذا كان}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 4+2 & 0+6 \\ 2+0 & 7+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{فإن}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

معكوس جمع (أو طرح) مصفوفتان هو جمع (أو طرح) المصفوفتان المعكوستان .

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

ضرب المصفوفتان

حاصل ضرب AB بهذا الترتيب للمصفوفة A $m \times n$ والمصفوفة B $n \times l$ هي المصفوفة C $m \times l$

$$C = [c_{ij}] : \text{حيث} \quad C = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \dots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1m}b_{m1}] = \left[\sum_{k=1}^m a_{1k}b_{k1} \right]$$

لاحظ أن كل عنصر في مصفوفة الصف تضرب في العنصر المناظر في مصفوفة العمود ثم يجمع حاصل الضرب وغالباً تعرف C بالقيمة الحسابية C_{11} وتعامل معها كرقم عادي من بين الأرقام التي يشملها عناصر A ، B .

وضرب AB بهذا الترتيب $m \times s$ للمصفوفة A $[a_{ij}]$ والمصفوفة B $[b_{ij}]$ $s \times n$ هي المصفوفة

$$C = [c_{ij}] : m \times n \text{ بحيث}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

مثال B2 :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3I_1 + 5I_2 - 8I_3 \\ 2I_1 + I_2 + 6I_3 \\ 4I_1 - 6I_2 + 7I_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(8) + (-3)(7) & 5(-2) + (-3)(0) & 5(6) + (-3)(9) \\ 4(8) + 2(7) & 4(-2) + 2(0) & 4(6) + 2(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -10 & 3 \\ 46 & -8 & 42 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A قابلة للضرب مع المصفوفة B أى أن حاصل الضرب AB متواجد فقط حينما يكون عدد أعمدة A مساوياً لعدد صفوف B وبالتالي فإنه إذا كان A مصفوفة 3×2 ، B مصفوفة 2×5 فإنه يمكن عمل الضرب AB ولكن حاصل الضرب BA غير جائز وإذا كانت كلا من A ، D مصفوفتان 3×3 فإن كلا الضربين DE ، ED جائز ومع هذا فإنه ليس ضرورياً أن يكون صحيح بأن $ED = DE$.

ومعكوس حاصل ضرب مصفوفتان هو حاصل ضرب معكوسيهما بعد عكس الترتيب .

$$(AB)^T = B^T A^T$$

إذا كانت AB مصفوفتان غير منفردتان ولهما نفس المقياس فإن AB تكون أيضاً غير منفردة مع

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

ضرب المصفوفة فى عدد حسابى

يعرف ضرب المصفوفة $A = [a_{ij}]$ بعدد حسابى k يعرف بالتالى :

$$kA = A k = [ka_{ij}]$$

أى أن كل عنصر فى A تضرب فى k ولاحظ الخواص

$$k(A + B) = kA + kB \quad k(AB) = (kA)B = A(kB) \quad (kA)^T = kA^T$$

B4 محدود المصفوفة الجريئة

ملحق بكل مصفوفة $n \times n$: $A = [a_{ij}]$ دالة حسابية معينة لعناصر a_{ij} تسمى محدّد A وهذا الرقم يعرف بالتالى :

$$\det A \quad \text{or} \quad |A| \quad \text{or} \quad \Delta_A \quad \text{or} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

بحيث يوضح الشكل الأخير عناصر المصفوفة A والتى منها تتحدد قيمته وللمحددات ذات الرتبة 1 ، 2 ، m وتوضيحا لذلك :

$$|a_{11}| = a_{11} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

واستخدام هذه التعبيرات لقيم n الكبيرة يحتاج لجهد شاق وفي الغالب ما نتجنبها باستخدام نظرية مفكوك لابلاس (انظر فيما بعد) ومن المهم هنا أن نعرف بأن تعريف المحدد يكون بحيث :

$$\det AB = (\det A)(\det B)$$

لأي محددين $n \times n$ فإنه يوجد خاصيتين أساسيتين هما :

$$\det A^T = \det A \quad \det kA = k^n \det A$$

وأخيراً فإن $\det A \neq 0$ (للمحدد A) إذا فقط إذا كانت A ليست متفردة .

مثال B3 : تحقق قاعدة ضرب المحددات لما يلي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{bmatrix}$$

لدينا

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9+4\pi \\ -4 & 27+2\pi \end{bmatrix}$$

$$\text{and} \quad \begin{vmatrix} 2 & 9+4\pi \\ -4 & 27+2\pi \end{vmatrix} = 2(27+2\pi) - (9+4\pi)(-4) = 90 + 20\pi$$

$$\text{But} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(2) - 4(3) = -10$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{vmatrix} = -2(\pi) - 9(1) = -9 - 2\pi$$

$$90 + 20\pi = (-10)(-9 - 2\pi) \text{ وحقيقة}$$

نظرية مفكوك لابلاس

المحدد الأصغر M_{ij} للعناصر a_{ij} للمحدد ذو الرتبة n هو المحدد ذو الرتبة $n-1$ والتي حصلنا عليها من حذف الصف والعمود المحتوي على a_{ij} . والعامل المساعد Δ_{ij} يعرف بالتالي :

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

وتقرر نظرية لابلاس أن :

في المحدد للمصفوفة المربعة A اضرب كل عنصر في الصف p (والعمود) بالعامل المساعد للعنصر المناظر في الصف q (والعمود) واجمع حاصل ضرب الناتج 0 عند $p \neq q$ ويكون مساوياً للمحدد A عند $p = q$.

وينتج عن ذلك مباشرة من نظرية لابلاس أنه إذا كان A له صفين أو عمودين متطابقان فإن المحدد $A = 0$ (ويجب أن يكون A مصفوفة وحيدة).

عكس المصفوفات بالمحددات

قاعدة كرامر :

يمكن بيان نظرية مفكوك لابلاس بحاصل ضرب المصفوفات كالتالي :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \dots & \Delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \dots & \Delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

or

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)I$$

حيث $A = [\Delta_{ij}]$ وهو معكوس المصفوفة للعوامل المساعدة للمصفوفة $n \times n$ في محدد A ، I هي مصفوفة الوحدة $n \times n$.

وإذا كانت A ليست فردية فإنه يمكن إجراء القسمة بالمحدد $\det A \neq 0$ ونستبدل أن :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

وهذا يعني أن الحل الوحيد للنظام الخطي $AX = Y$ هو :

$$X = \left(\frac{1}{\det A} \text{adj } A \right) Y$$

وهو قانون كرامر في شكل المصفوفة. ونحصل على الشكل العام للمحدد بأخذ الصف r (حيث $r = 1, 2, 3, \dots, n$) لحل المصفوفة. وحيث أن الصف r للمحدد $\text{adj } A$ هو :

$$[\Delta_{1r}, \Delta_{2r}, \Delta_{3r}, \dots, \Delta_{nr}]$$

فلنأخذ نحصل على :

$$\begin{aligned}
x_r &= \left(\frac{1}{\det A} \right) [\Delta_{1r}, \Delta_{2r}, \Delta_{3r}, \dots, \Delta_{nr}] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{\det A} \right) (y_1 \Delta_{1r} + y_2 \Delta_{2r} + y_3 \Delta_{3r} + \dots + y_n \Delta_{nr}) \\
&= \left(\frac{1}{\det A} \right) \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(r-1)} & y_1 & a_{1(r+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(r-1)} & y_2 & a_{2(r+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(r-1)} & y_n & a_{n(r+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

يمكن تحقيق المتساوية الأخيرة باستخدام نظرية لابلاس للعمود r للمحدد المعطى.

B5 القيم الجذرية للمصفوفة المربعة

لنظام الخطى $Y = AX$ بالمصفوفة A $n \times n$ فإنه من المهم البحث عن «الإثارات» X التى ينتج عنها «التجاوب» المتناظر Y وبالتالى ضح $Y = \lambda X$ حيث λ عدد حسابى .

$$\lambda X = AX \quad \text{or} \quad (\lambda I - A)X = 0$$

بحيث 0 هى مصفوفة صفرية $n \times n$ والآن إذا كانت المصفوفة $A - \lambda I$ ليست وحيدة فإن الحل $X = Y = 0$ سيتبع . وبالتالى فإنه للحصول على الحل الهام فإن قيمة λ يجب أن تكون بحيث تجعل $A - \lambda I$ مصفوفة وحيدة أى أنه يجب أن يكون لدينا :

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

والحدود n لمعادلة المتعددة الحدود التى تشتمل على λ هى القيم الجذرية للمصفوفة A والحلول الهامة المتناظرة X تعرف بالمتجهات الجذرية للمصفوفة A وبوضع $\lambda = 0$ فى الطرف الأيسر من معادلة الخواص السابقة نجد أن الحد الثابت A فى المعادلة يجب أن يكون :

$$\det(-A) = \det[(-1)A] = (-1)^n \det(A)$$

وحيث أن معامل λ فى المعادلة هو الوحدة الوحيدة فإن الحد الثابت سيكون أيضاً $(-1)^n$ مكررة فى ضرب جميع الجذور وبذلك فإن محدد المصفوفة المربعة هو حاصل ضرب جميع القيم الجذرية بالتتابع وهو تعريف مفيد فى المحددات .

ملحق C

أمثلة توضيحية

من معلم شاوم الإلكتروني

لهذا الكتاب كتاب آخر رفيق له يسمى معلم شاوم الإلكتروني والذي يستخدم طريقة مائكااد التجارية ومصمم لمساعدتك لتعلم المادة العلمية بطريقة مباشرة . ويستخدم المعلم الإلكتروني بيئة الرياضة الحية [LIVE-MATH] في تكنولوجيا حساب برامج الحاسب ليوضح لك على الشاشة ما يقرب من مائة مسألة محلولة من هذا الكتاب بالإضافة إلى ملخص لطريقة التعامل مع النقاط النظرية وما يناظرها الكترونيا وما يتعلق بها . وفي الصفحات التالية إعادة صياغة عينات توضيحية مرئية من المعلم الإلكتروني لتساعدك في فهم الإمكانيات الكبيرة لهذه الأداة الإلكترونية التعليمية . وقارن هذه الشاسات المرئية المرافقة بالمسائل المحلولة من هذا الكتاب (أرقام الصفحات المناظرة مذكورة عند بداية كل مسألة) لترى أن كلاهما مكمل للأخر . وكيف أن ذلك مفيد جداً .

وفي معلم شاوم الإلكتروني ستجد كل المادة العلمية والأشكال والمعادلات لكل مسألة محلولة بالإضافة لما يبدو في شاشة الحاسب . وكما ستري في الصفحات التالية فإن كل الرياضيات ستبدو في شكل مألوف شاملة الوحدات . واختلاف الصور الرياضية والتي تلاحظها بين نشرة شاوم المطبوعة والمعلم الإلكتروني مصممة لحت انتباهك للمادة العلمية أو لبيان الطرق المختلفة لحل المسائل الصعبة .

وبقراءة تلك للصفحات التالية تذكر أن كل رقم أو علامة أو شكل سيكون لها التأثير الكبير حينما تراها على شاشة الحاسب . ويمكنك تغيير بيانات البداية لمسألة وملاحظة أشكالاً جديدة للخروج بحسب أمام عينيك كما يمكنك تغيير أى معادلة وفي الحال ستري التأثير على الحسابات الرقمية على الحل . فكل معادلة أو شكل أو رقم تراه قابل للاختبار وكل مسألة محلولة موجودة تصيح ورقة عمل حية يمكنك تعديلها لحل عشرات المسائل المشابهة . والمعلم الإلكتروني المصاحب لهذا الكتاب سيساعدك في تعلم واسترجاع المادة العلمية التي درست في هذا الكتاب كما يمكنك استعماله كأداة تشغيل لحل المسائل وعلامة ماسكااد المبينة على اليسار

مطبوعة خلال هذا البيان لتبين المسال الموجودة في المعلم الإلكتروني .

وللحصول على معلومات إضافية عن المعلم الإلكتروني المرافق بما في ذلك متطلبات النظام انظر من فضلك إلى خلاص الكتاب الخلفي .

متوسط القدرة والطاقة :

(الدوائر الكهربائية لشاوم ، الطبعة الثالثة ، المسألة المحلولة 1-3 ص 4-5)

البيان : تحمل الدائرة الخطية التيار $i(t, \omega)$ حيث ω هي تردد الزاوية - يوجد فرق جهد على طرفي
العنصر $v(t, \omega)$. أوجد الطاقة W_T المنقولة في فترة واحدة للدالة الجيبية ومتوسط
القدرة P_{avg} .

مكونات النظام :

$$mA = 10^{-3} \cdot amp$$

$$mW = 10^{-3} \cdot watt$$

$$Hz = \frac{1}{sec}$$

قيم التيار والجهد .

$$I_0 = 2.5 \cdot mA$$

$$V_0 = 45 \cdot volt$$

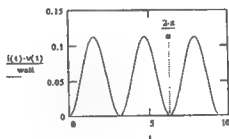
نفترض أن التردد $\omega = 1 \text{ Hz}$

$$i(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$v(t) = V_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

الحل : يتكون تغير كلا من التيار والجهد طبقا للموجة الجيبية المعروفة من خلال الزمن . حينما تضربان
في بعضهما (القدرة = $v \cdot i$) فإن تغيرهما بالنسبة للزمن يبدو هكذا :

$$t = 0 \cdot sec, \frac{1}{\omega}, 3 \cdot \frac{\pi}{\omega}$$



الطاقة هي المساحة أسفل المنحنى أو التكامل خلال دورة واحدة للقدرة اللحظية $v \cdot i$.

$$W_T = \int_0^{2 \cdot \frac{\pi}{\omega}} v(t) \cdot i(t) \cdot dt$$

$$W_T = 0.353 \cdot joule$$

القدرة اللحظية هي بالتالي الطاقة مقسومة على زمن دورة واحدة .

$$P_{avg} = \frac{W_T}{2 \cdot \frac{\pi}{\omega}}$$

$$P_{avg} = 56.25 \cdot mW$$

حاول تغيير قيمة التردد ولاحظ أن الطاقة في دورة واحدة تتغير (والدورات الأقصر تحتوي على قدرة أقل) ولكن هذه القدرة P_{avg} لا تعتمد على ω وهي بالتالي ثابتة وتتوقف القدرة المتوسطة على قيم الموجات الجيبية كالتالي:

$$P_{avg} = \frac{V_0 \cdot I_0}{2}$$

$$P_{avg} = 56.25 \text{ mW}$$

حاول حل التكامل جبرياً لتأكد من الصحة .

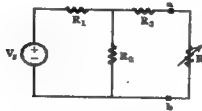
نظرية القدرة العظمى المنقولة :

(الدوائر الكهربائية لشاوم ، الطبعة الثالثة ، المسألة للحلولة 4-16 ، ص 52)

البيان : أوجد المقاومة المتغيرة R والتي تنتج من أكبر قدرة منقولة على الطرفين a ، b للدائرة المبينة فيما بعد .

(حينما تكون المقاومة قابلة للتغيير فإنها تسمى مجزئ جهد) .

مكونات النظام



$$\Omega = \text{ohm}$$

$$V_s = 100\text{-volt}$$

$$R_1 = 10\text{-}\Omega$$

$$R_2 = 15\text{-}\Omega$$

$$R_3 = 5\text{-}\Omega$$

الحل : نحصل أولاً على مكافئ ثنتين للدائرة باستبعاد المقاومة المتغيرة R واتبع نفس نظام الحل المبين في المسألة 4-6 . ومكافئ ثنتين (للدائرة المفتوحة) للجهد هو :

$$V' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V_s$$

$$V' = 60\text{-volt}$$

مقاومة ثنتين المكافئة

$$R' = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R' = 11\text{-ohm}$$

باستخدام نظرية القدرة العظمى المنقولة في الفصل 4 فإن أكبر قدرة منقولة تحدث عند $R = R'$ وبالتالي فإن أكبر قدرة منقولة هي :

$$P_{max} = \frac{V'^2}{4 \cdot R'}$$

$$P_{max} = 81.818\text{-watt}$$

لنقتنع بهذا العمل حاول إيجاد القدرة المفقودة في المقاومة R باستخدام طرق تبسيط الشبكة المعروفة كما هو مبين في المسألة 4-7 وستصل إلى تعبير القدرة التالي :

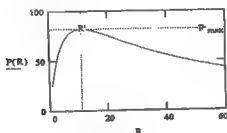
$$P(R) = \frac{\left[\frac{V_s R_2 R_3}{R_1 (R + R_3 + R_2) + R_2 R + R_2 R_3} \right]^2}{R}$$

لنقتنع بهذا العمل حاول إيجاد القدرة المفقودة في المقاومة R باستخدام طرق تبسيط الشبكة المعروفة كما هو مبين في المسألة 4-7 وستصل إلى تعبير القدرة التالي :

$$P(R) = \frac{\left[\frac{V_s R_2 R_3}{R_1 (R + R_3 + R_2) + R_2 R + R_2 R_3} \right]^2}{R}$$

ارسم هذا التعبير مع قيم مختلفة للمقاومة R وتبين أن القيمة العظمى هي :

$$R = 1.0 \dots 60 \Omega$$



والآن تبين لك فائدة نظرية القدرة العظمى المتقولة ويمكن استخدام تبسيط الشبكة للحصول على هذه القيمة العظمى باستخدام التفاضل ولكن هذه الطريقة تستغرق وقتاً طويلاً بالنسبة للطريقة البسيطة باستخدام مكافئ ثنتين .

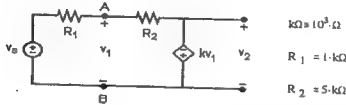
ملاحظة للمؤلف : المكتوب بخط ثقيل والمكتوب تحت خط في هذه المسألة يبين نوعاً مختاراً من المسائل وإذا كنت تعمل بالحاسب فإن الضغط مرتان على هذه الأجزاء بالفأرة سيعود بك إلى الملف الخاص بهذه المادة .

التغذية الخلفية في دائرة المكبر المثالي :

(الدوائر الكهربائية لشاوم ، الطبعة الثالثة ، مثال 4-5 ص 60)

السبان: (أ) أوجد V_2/V_s كدالة في كسب الدائرة المفتوحة k . (ب) احسب V_2/V_s عند 1000 ،
 $k = 100$ وناقش النتائج.

مكونات النظام :



الحل : المكبر التالي هو جزء من الدائرة على يمين المقدمتان A ، B في الشكل مع مقاومة التغذية الخلفية R_2 بدلا من الدائرة المفتوحة وأضيفت مقاومة التغذية الخلفية للتحكم في الكسب الكلي للمكبر وحيث :

$$v_2 = k \cdot v_1$$

or

$$v_1 = \frac{v_2}{k}$$

استخدم KCL عند المقدة A لتعطى :

$$\frac{v_1 - v_s}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = \left(\frac{-v_2}{k} - v_s \right) \cdot \left(\frac{-v_2}{k} - v_2 \right) = 0$$

باستخدام منظم العمليات الرمزي ماتكاد يمكن لنا الحل لإيجاد V_2 (يمكن الاستغناء عن ها الجزء إذا كنت مستخدما ماتكاد للحصول على معلومات أكثر عن طريقة استخد منظم العمليات الرمزي انظر معلم ماتكاد .

$$v_2 = v_s \cdot \frac{-R_2 \cdot k}{(R_2 + R_1 + R_1 \cdot k)}$$

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{R_2 \cdot k}{(R_2 + R_1 + R_1 \cdot k)}$$

وبحلول النسب

$$h = \frac{R_1}{R_1 - R_2}$$

In this case

$$h = 0.167$$

يمكن كتابة الكسب V_2/V_s

$$G_{neg} = \frac{v_2}{v_s}$$

(كلمة neg تمثل كسبا معكوسا)

$$G_{neg}(k) = (1 - b) \cdot \frac{-k}{1 + b \cdot k}$$

(ب) للقيم المعطاة للثابت k فإن المكاسب تكون:

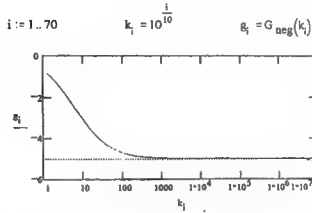
$$k_1 = 100 \quad G_{neg}(k_1) = -4.717$$

$$k_2 = 1000 \quad G_{neg}(k_2) = -4.97$$

وبذلك عند زيادة k لعشرة أمثالها ينشأ تغيير طفيف في الكسب V_2/V_s

$$\frac{G_{neg}(k_2) - G_{neg}(k_1)}{G_{neg}(k_1)} = 5.368\%$$

وعدنانين ذلك بوضوح أكثر بدراسة V_2/V_s بالرسم في k



وشيء واحد يجب ملاحظته أنه للقيم الكبيرة للثابت k فإن V_2/V_s تقترب من $-R_2/R_1$

$$G_{neg}(\infty) = -5$$

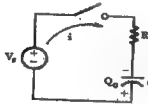
وبذلك فإنه مع التمدد الخلفية طالما أن k ليست صغيرة جداً فإن الكسب الكلي لا يتوقف على تغيرات k .

تكوين الجهد المستمر علي طرفي المكثف :

(الدوائر الكهربائية لشاوم، الطبعة الثالثة، المسألة المحلولة 7-7 ص 144).

البيان: أقفل المفتاح في الدائرة المبينة فيما يلي عند الزمن $t = 0$ وفي هذه اللحظة كان على المكثف الشحنة Q_0 بالإشارات المبينة. أوجد i ، عند $t > 0$ وارسم شكلاً للقيمة q .

مكونات الدائرة :



$$R = 1 \cdot k\Omega$$

$$V_s = 50 \text{ volt}$$

$$C = 20 \cdot \mu F$$

$$Q_0 = 500 \cdot \mu C$$

$$k\Omega = 10^3 \cdot \text{ohm}$$

$$\mu F = 10^{-6} \cdot \text{farad}$$

$$\mu C = 10^{-6} \cdot \text{coul}$$

$$ms = 10^{-3} \cdot \text{sec}$$

$$mA = 10^{-3} \cdot \text{amp}$$

الحل: نعلم أنه عند $t > 0$ فإن العلاقة بين i ، C ، v (وهو الجهد على C) هو:

$$i = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

عند $t > 0$ فإن KVL حول الحلقة يعطى:

$$V_s = R \cdot i + v(t) = R \cdot C \cdot \frac{dv}{dt} + v$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R \cdot C} = \frac{V_s}{R \cdot C}$$

مع أخذ الحالة الابتدائية على v_C فإن

$$v(0 \text{ ms}) = \frac{Q_0}{C}$$

(الإشارة السالبة تعنى أن القطبية المبينة في عكس اتجاه التيار)

الحل الخاص (أو القصرى) يحقق المعادلة التفاضلية ولكن ليس الحالة الابتدائية.

$$v_p(t) = V_s$$

وهذا الحل الخاص صحيحاً لأنه عند $t = \infty$ سيكون التيار صفراً وبالتالي لن يكون هناك خفض في الجهد على طرفي R . والحل المتجانس (أو التجاوب الطبيعي) .

$$v_h(t) = A \cdot \exp\left(\frac{-t}{R \cdot C}\right)$$

يمكن إضافته . ويمكن ضبط قيمة A بحيث يكون الحل الكلي $v_p + v_h$ تحقق كلا المعادلتين :

$$v(t) = v_p(t) + v_h(t) = V_s + A \cdot \exp\left(\frac{-t}{R \cdot C}\right)$$

ومن الحالة الابتدائية نصل إلى قيمة A .

$$v(0 \text{ ms}) = \frac{-Q_0}{C} = V_s + A \quad \frac{-Q_0}{C} = -25 \text{ volt}$$

$$A = \frac{-Q_0}{C} - V_s$$

وبالتالي

$$v(t) = \left(\frac{-Q_0}{C} - V_s \right) \exp\left(\frac{-t}{R \cdot C}\right) + V_s$$

والتي منها

$$q(t) := C \cdot v(t) \quad \text{and} \quad i(t) := \frac{d}{dt} q(t)$$

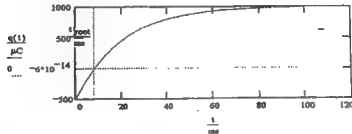
رسمنا أشكال $q(t)$ ، $i(t)$ ، $v(t)$ فيما يلي لإيجاد فترة تكون $q = 0$ (حيث يقطع المنحنى محور X) . استخدم دالة الجذر المشروحة في معلم مائكا .

ضمن

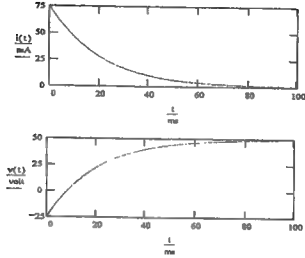
$$t_{\text{root}} = 5 \text{ ms}$$

$$t_{\text{root}} = \text{root}(v(t_{\text{root}}), t_{\text{root}}) \quad t_{\text{root}} = 8.109 \text{ ms}$$

$$t = 0 \text{ sec}, 2 \cdot R \cdot C, 5 \cdot R \cdot C$$



المنحنى السابق يبين أن الشحنة تتغير من القيمة الابتدائية لها إلى الشحنة المحددة بجهد المتبع المتصل عند $t = 0$. وحيث أن هاتين الشحنتين لهما قطبية متضادة فإن المنحنى يمر بالصفر كما هو مبين في الشكل .

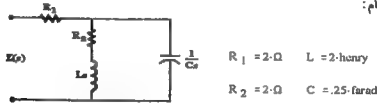


الممانعة المتوقفة على التردد :

(الدوائر الكهربائية لشاوم، الطبعة الثالثة، المسألة المحلولة 11-8 ص 175)

البيان : أوجد الممانعة $Z_{in}(s)$ للدائرة المبينة فيما بعد في المجال $0 < s < \infty$ ارسم القيمة والزاوية على مقياس لوغارتمي .

مكونات النظام :



الحل : باستخدام طريقة التبسيط القياسية للشبكة . أوجد الممانعة المكافئة لهذه الدائرة .

$$Z_{in}(s) = R_1 + \frac{(R_2 + Ls) \cdot \left(\frac{1}{C \cdot s} \right)}{(R_2 + Ls) + \frac{1}{C \cdot s}}$$

$$Z_{in}(s) = \frac{(R_1 \cdot R_2 \cdot C \cdot s + R_1 \cdot L \cdot s^2 \cdot C + R_1 + R_2 + Ls)}{(R_2 \cdot C \cdot s + L \cdot s^2 \cdot C + 1)}$$

استخدم منظّم العمليات الرمزى لتبسيط هذه العلاقة (إذا كنت مستخدماً ماكينة مائكاد فليست في حاجة لذلك).

$$Z_{in}(s) = \frac{[R_1 \cdot L s^2 C + (R_1 \cdot R_2 \cdot C + L) \cdot s + R_1 + R_2]}{(R_2 \cdot C s + L s^2 C + 1)}$$

اقسم كلا من البسط والمقام على LC.

$$Z_{in}(s) = \frac{\left(R_1 \cdot s^2 + \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C} \cdot s + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot C} \right)}{\left(s^2 + \frac{R_2}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right)}$$

$$Z_{in}\left(0, \frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right) = 4 \cdot \Omega \quad \text{عند } s = 0 \quad (أ)$$

وهي الممانعة المتوقفة مع منبع التيار المستمر الثابت: فيكون المكثف كدائرة مفتوحة والملف لدائرة مقصورة كما هو مبين في الفصل 7 وتبقى فقط المقاومتان على التوالي.

(ب) عند $s = j4 \text{ rad/s}$

$$Z_{in}\left(j \cdot 4, \frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right) = 2.038 - j1.132 \text{ ohm}$$

ولدواعي استعمال المتجهات:

$$\left| Z_{in}\left(j \cdot 4, \frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right) \right| = 2.331 \text{ ohm} \quad \arg\left(Z_{in}\left(j \cdot 4, \frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)\right) = -29.055 \cdot \text{deg}$$

وهذه هي الممانعة المتدفقة للمنع $\cos(4t)$ أو $\sin(4t)$.

(ج) بالنظر في الدائرة $Z_{in}(\infty) = 2 \Omega$ ولكي نرى ذلك اقسم كل حد في علاقة الممانعة بالقيمة s^2 . الحدود التي بها s ، s^2 في المقام ستكون صفراً في النهاية وكل ما يتبقى هو R_1 .

$$Z_{in}(s) = \frac{\left(R_1 + \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C \cdot s} + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot C \cdot s^2} \right)}{\left(1 + \frac{R_2}{L \cdot s} + \frac{1}{L \cdot C \cdot s^2} \right)} \quad R_1 = 2 \cdot \Omega$$

ويستطيع أيضاً منظّم العمليات الرمزى الوصول للقيمة Z_{in} حينما s تقترب من ∞ (إذا كنت مستخدماً ماكينة مائكاد فليست في حاجة لذلك).

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left(R_1 \cdot s^2 + \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C} \cdot s + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot C} \right)}{\left(s^2 + \frac{R_2}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right)} \quad \text{yields} \quad R_1$$

عند الترددات العالية جدا يبدو أن المكثف كما لو كان دائرة قصيرة على طرفى فرع RL كما نوقش فى الفصل 12.

دعنا نقوم بدراسة صغيرة على مدى توقف الممانعة وزاوية الوجه على التردد وللحصول على مدى واسع لتغير s فإن استخدام المقياس اللوغارىفى الذي يجعل المسافات متساوية المضروب 10.

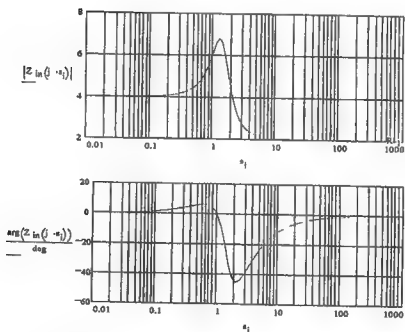
$$s_{\text{low}} = .01 \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \text{أقل قيمة فى الرسم}$$

$$s_{\text{high}} = 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \text{أكبر قيمة فى الرسم}$$

$$N = 100 \quad i = 0, N - 1 \quad \text{عدد النقاط}$$

$$r = \log \left(\frac{s_{\text{low}}}{s_{\text{high}}} \right) \cdot \frac{1}{N} \quad r = -0.04 \quad \text{حجم الخطوة}$$

$$s_i = s_{\text{high}} \cdot 10^{i \cdot r} \quad \text{متغير المدى}$$



من الملاحظ أن تصرف الدائرة يتغير من حالة لأخرى وتصل الممانعة إلى قيمتها العظمى عند تردد الرنين وإضافة أكثر فى مادة تجاوب التردد والرنين سيأتى فى الفصل 12.

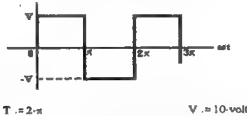
ملاحظة المؤلف: لاحظ أنه يمكن إدخال الأعداد المتجهة أو التخيلية في ماثكاد إما بالشكل الأسى $Ae^{j\omega t}$ وبالإحداثيات. وحينما يحسب الحاسب إجابة تخيلية فيسُويدها بالشكل الإحداثي ولكن يمكن استخراج القيمة والزاوية بسهولة كما هو مبين سابقا باستخدام المعاملات \angle ، \arg للقيمة الحسابية والزاوية بالترتيب ولاحظ أيضا أنه تم التعامل أوتوماتيكيا مع عكس المصفوفة ولذلك فإن المحددات والمحددات الفرعية المستخدمة في النسخة المعدلة لشاوم ليست مطلوبة.

متوالية فوريير للموجة المربعة :

(الدوائر الكهربائية لشاوم، الطبعة الثالثة، المسألتين 17-1، 8-17 ص 419، ص 424)

البيان : (أ) أوجد متوالية فوريير المثلثية للموجة المربعة ذات الفترة T والمبينة فيما يلي وارسم شط الطيف. أهد تركيب الموجة في الزمن باستخدام معاملات فوريير. (ب) أوجد معاملات فوريير للمتوالية الأسية وقارنها بمعاملات المثلثية.

تركيب النظام :



الحل: في الفترة $0 < \omega t < \pi$ $f(t) = V$ وفي الفترة $\pi < \omega t < 2\pi$ $f(t) = -V$. لاحظ أن هذه الموجة تتفق مع حالات ديرشلت في الفصل 17 لأنها تحتوي على عدد محدد من عدم الاستمرارية لكل فترة. والقيمة المتوسطة للموجة صفرا ولذلك بالنظر في الموجة $2 = 0$ $\omega t/2$ ونحصل على معاملات جيب التمام بعد كتابة ناتج التكامل بالدوال المستخدمة كالتالي :

$a_0 = 0V$ نظراً لأن القيمة المتوسطة صفرا

$a_0 = 0$ -volt since the average value is zero.

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot \cos(n\omega t) d(\omega t) + \int_{\frac{T}{2}}^T (-V) \cdot \cos(n\omega t) d(\omega t) \right]$$

وبالتعويض $u = \omega.t$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot \cos(n \cdot u) \, du + \int_{\frac{T}{2}}^T (-V) \cdot \cos(n \cdot u) \, du \right]$$

اختار منظم العمليات الرمزى للحمل ومن قائمة الرموز اختار العلاقة السابقة كلها ثم اختار إجراء العملية رمزياً (إذا كنت مستخدماً لماكينه مائكاكد فليست فى حاجة لذلك).

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \left(2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot T\right)}{n} \cdot V - \frac{\sin(n \cdot T)}{n} \cdot V \right) = 0 \text{ volt}$$

والمفروض أن تتوقع هذه النتيجة لأن الموجة فردية وبذلك تشمل متوالية فوريير على حدود الجيب فقط.

ومع موالاة الحل بالتكامل لحدود الجيب.

$$b_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot \sin(n \cdot u \cdot t) \, d(u \cdot t) + \int_{\frac{T}{2}}^T (-V) \cdot \sin(n \cdot u \cdot t) \, d(u \cdot t) \right]$$

وبالتعويض $u = \omega.L$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \left[\int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot \sin(n \cdot u) \, du + \int_{\frac{T}{2}}^T (-V) \cdot \sin(n \cdot u) \, du \right]$$

و مرة أخرى حل هذه العلاقة رمزياً وبسط الناتج:

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \left(-2 \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot T\right)}{n} \cdot V + \frac{1}{n} \cdot V + \frac{\cos(n \cdot T)}{n} \cdot V \right)$$

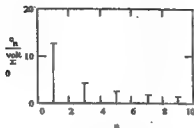
تعرف العشرة حدود الأولى لقيم التوافقيات بدلالة معاملات b_n .

$$n_{\max} = 10$$

$$n = 1 \dots n_{\max}$$

$$c_n = \sqrt{(b_n)^2}$$

وأسقطت المعاملات a_n من هذه العلاقة لأنها جميعاً أصفاراً والآن نقوم بتجهيز رسم خط العلف.

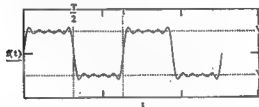


استخدم نوع الراسم "error" لنسخ خطوط الطيف ولعمل ذلك ارسم كسلا من المعاملات وخط الصفر واختار نوع الراسم "error" لكليهما. وللحصول على معلومات أخرى في اختيار طريقة الرسم (انظر معلم ماثكام A).

تحتوى المتوالية على حدود التوافقيات الفردية للجيب (الحدود الزوجية صفر وكما كان متوقعا بالنظر في الموجة للتماثل). ويحتوى التماثل النصف موجى على التوافقيات الفردية. ويمكن للمتوالية أن تحتوى على حدود جيب التمام إذا تحركت نقطة الأصل للموجة ولكن ستبقى فقط الحدود الفردية للتوافقيات في الشكل الطيفى. حاول في ذلك لترى النتيجة.

لتنتج بنفسك أن هذه المتوالية تمثل حقيقية موجة مربعة أعد تركيب الموجة التالية :

$$f(t) := \sum_n b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \quad t := 0, .01 \cdot T, .2 \cdot T$$



يمكنك أن ترى كيف أن الشكل يبين تقريبا الموجة المربعة المطلوبة وذلك اعتماداً على الرمز n حاول تغيير قيمة n_{max} لترى كيف يتأثر شكل الموجة تحسيتاً أو سوءاً.

(ب) فى الفترة $0 < t < \pi$ فى $f(t) = -V$ ، $-\pi < \omega t < 2\pi$ فى الفترة $f(t) = V$. والموجة فردية لذلك فإن $A_0 = 0$ ، A_n ستكون تخيلية خالصة .

$$A_0 := 0 \text{ volt}$$

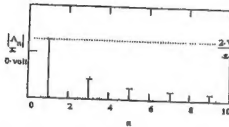
$$A_n = \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 -V \cdot e^{-j \cdot 2\pi n t} d(\omega t) + \int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot e^{-j \cdot 2\pi n t} d(\omega t) \right]$$

بالتعويض $u = \omega t$

$$A_n = \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 -V \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega} du + \int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega} du \right]$$

والآن جهاز رسم خط الطيف .

لاحظ أن القيمة أخذت للتعبير عن حجم المعاملات وليس بالصفة المركبة .



Note that the magnitude has been taken to display the size of the coefficients rather than their complex character.

وبين شكل الطيف قيم الترددات الموجبة فقط وبجميع القيم عند n ، $-n$ يؤدي إلى نفس الشكل الطيفي المرسوم سابقاً في الجزء (أ) .

ويمكن الحصول على معاملات المتوالية المثلثية باستخدام

$$n := 0..n_{max}$$

معاملات جيب التمام هي :

$$a_n = 2 \cdot \text{Re}(A_n) \quad a^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \text{ >volt}$$

وكما سبق فإن معاملات الجيب هي :

$$b_n = 2 \cdot \text{Im}(A_n)$$

$$b^T = (0 \ 12.732 \ 0 \ 4.244 \ 0 \ 2.546 \ 0 \ 1.819 \ 0 \ 1.415 \ 0) \text{ >volt}$$

قارن مع القيم الأصلية

$$b^T = (0 \ 12.732 \ 0 \ 4.244 \ 0 \ 2.546 \ 0 \ 1.819 \ 0 \ 1.415 \ 0) \text{ >volt}$$

ELECTRIC CIRCUITS

SCHAUM'S
ouTlines

OVER 30 MILLION SOLD

**لماذا تشتري كتاب
شوم؟
لأن كل كتاب يحتوي
على النظرية
الأساسية والتعريفات
ومئات من المسائل
المحلولة بعناية
وكذلك ... مسائل
غير محلولة
لمساعدة الطالب
على التفوق**



- مبادئ محاسب التفاضل والتكامل
- البرمجة بلغة الياسكال
- البرمجة بلغة البيسك (عربي)
- البرمجة بلغة ++C (جزيئين) جديد
- البرمجة بالفورتران
- البرمجة بلغة الكويل
- البرمجة بلغة C الجزء الأول
- البرمجة بلغة C الجزء الثاني
- أساسيات الفورتران
- أساسيات الكويل
الكيمياء والفيزياء
- الكيمياء العضوية
- الكيمياء العامة
- الفيزياء الجامعية جديد
- مبادئ الفيزياء
- البصريات جديد
الزراعة والعلوم الحيوية
- السوراة
الاقتصاد وإدارة الأعمال
- الإحصاء والاقتصاد القياسي
- الاقتصاد الدولي
- النظرية الاقتصادية الكلية
- نظرية اقتصاديات الوحدة
- أصول المحاسبة (١)
- أصول المحاسبة (٢)
التربية وعلم النفس
- مقدمة في علم النفس
- سيكولوجية التعلم

هندسة
المبادئ الرقمية
تكنولوجيا الإلكترونيات
الدوائر الكهربائية جديد
الميكانيكا الكهربائية
نظم القوى الكهربائية
النماذج الإلكترونية ودوائرها
أساسيات الهندسة الكهربائية جديد
الدynamics الحرارية
مقاومة المواد
ميكانيكا الموائع والهيدروليكا
اهتزازات ميكانيكية
الميكانيكا الهندسية - استاتيكا
الميكانيكا الهندسية - ديناميكا
رياضيات وعلوم
الاحصاء
بحوث العمليات
التحليل العددي
تحليل المتجهات
الجبر الخطي
التفاضل والتكامل المتقدم
حساب التفاضل والتكامل
الدوال المركبة
الرياضيات الأساسية للحاسب
الرياضيات المتقدمة
لمعادلات التفاضلية جديد
لميكانيكا العامة
نظرية الفئة

**INTERNATIONAL HOUSE FOR
CULTURAL INVESTMENTS**

P.O.Box 5599 Heliopolis West. Cairo/Egypt

Tel.: 2972344 - 2957655, Fax:(00202) 2957655